T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

# GRAF TEORİNİN TARİHÇESİ VE BAZI UYGULAMALARI

Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

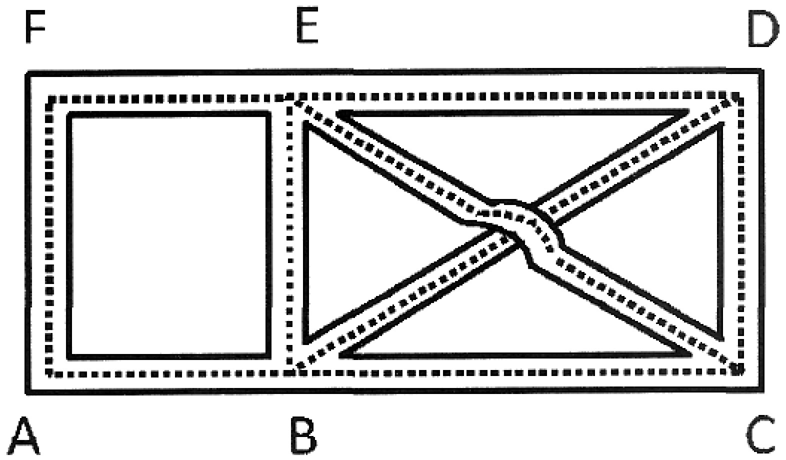
Konya, 2018

# GRAF TANIMI, TARİHÇESİ VE BAZI UYGULAMALARI

## Graf Tanımı

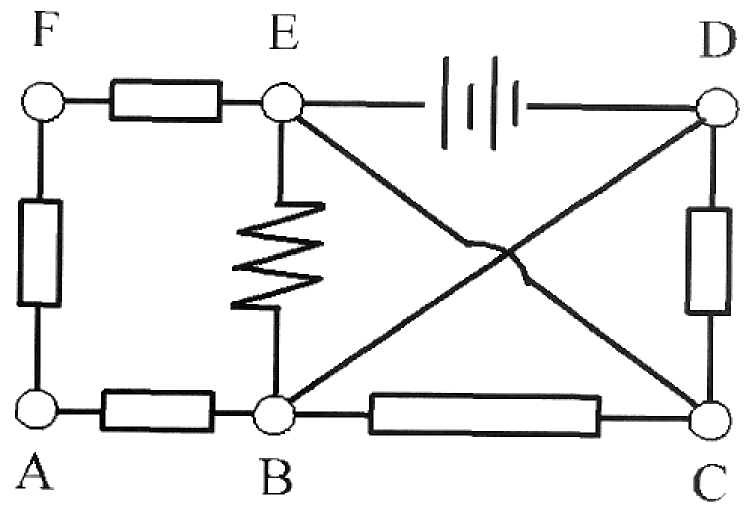
- Önce graf kavramını sezgisel olarak kısaca tanıyacağız.
- Aşağıdaki dört şekli inceleyelim.
- İlk şekilde *A*, *B*, *C*, *D*, *E ve F* şehirlerini birbirine bağlayan yollar, ikincide bir elektrik devresi, üçüncüde bir avukatın gün boyu ziyaret ettiği evi, adliye, baro, cezaevi, duruşma salonu ve fitness merkezi arasındaki geçiş yolları, sonuncuda ise altı kişinin birbirini tanıyıp tanımadıklarını gösteren ilişkiler birer çizgi ile gösterilmiştir.

- Örneğin son şekilde Akif, Bedri ile Fatma'yı tanımakta; ancak Eylem, Can ve Dicle'yi tanımamaktadır.



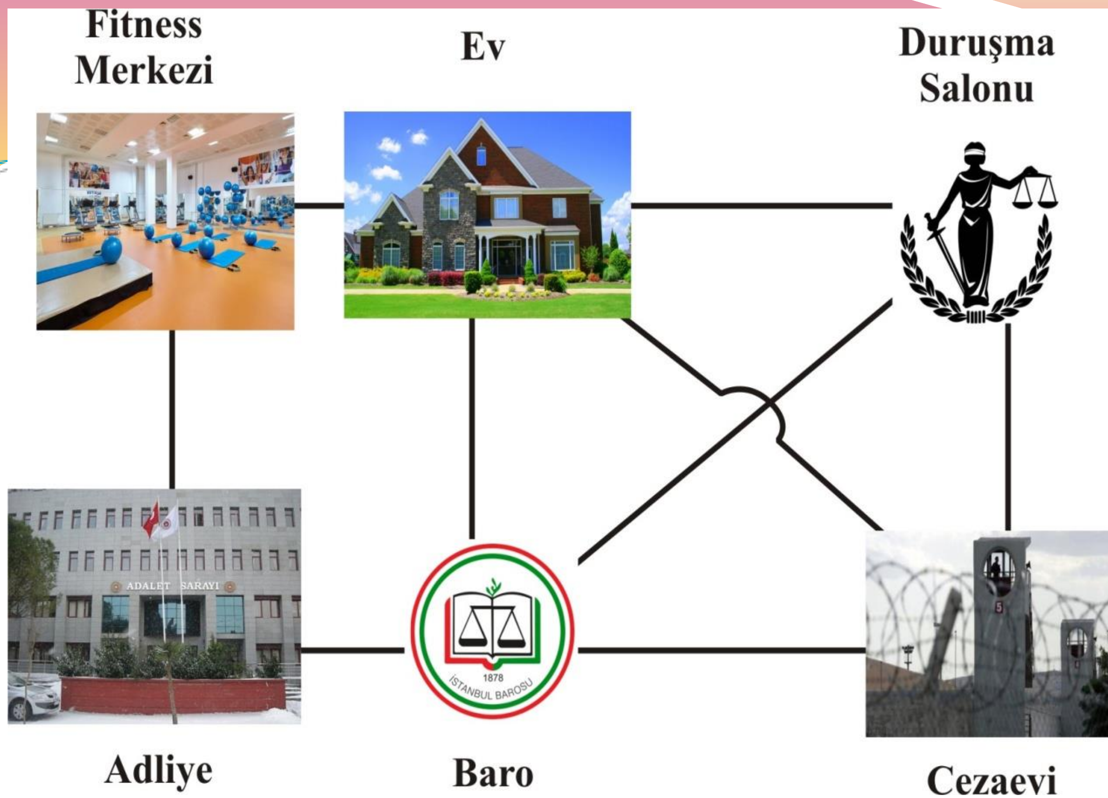

- **Şekil 1:**

**Kesişen yollar**

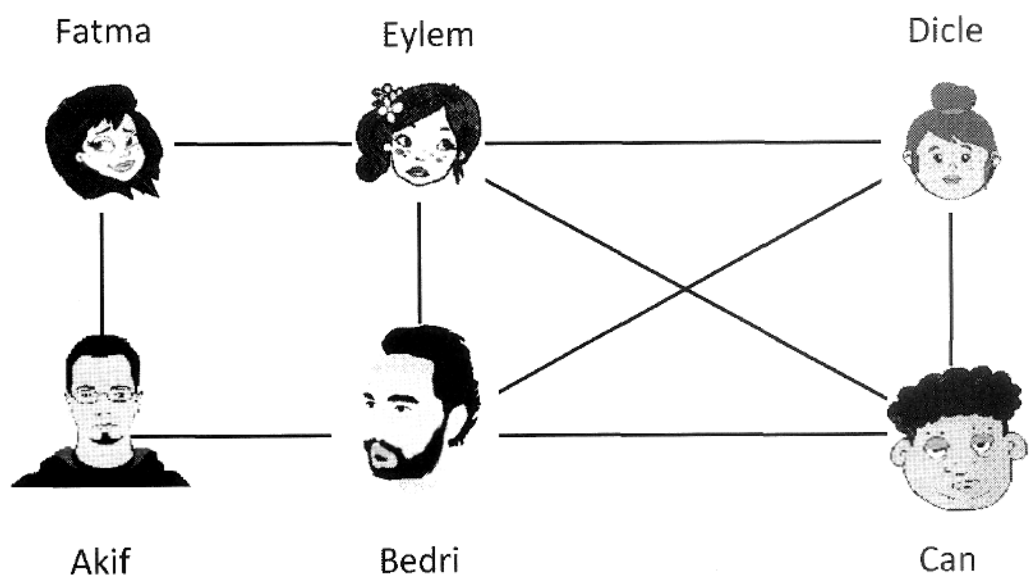



- **Şekil 2:**

**Bir elektrik devresi**

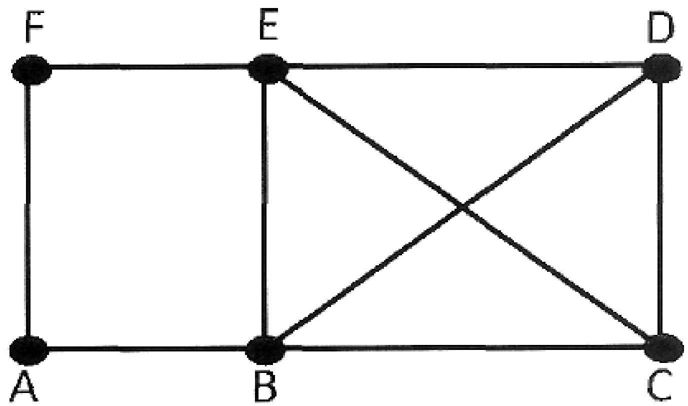



- **Şekil 3: Bir avukatın günlük rotası**




- **Şekil 4: Tanışıklıklar**

- Bu dört şeklin her biri farklı olaylara karşılık gelmekle birlikte tümü matematiksel olarak adına **graf** diyeceğimiz, nokta ve çizgilerden oluşan bir diyagramla temsil edilebilir, bkz. Şekil 5:




- **Şekil 5: İlk dört şekildeki olayların graf gösterimi**

- Böyle bir graf temsilinde *A*, *B*, *C*, *D*, *E ve F* ile işaretlenen noktalara **köşeler,** bunları birleştiren çizgilere de **<u>kenarlar</u>** adını vereceğiz.

- Birer küme ile gösterecek olursak köşelerin ve kenarların kümesi

$$V = \{A, B, C, D, E, F\},$$

$$E=\{AB, BC, BD, BE, CD, CE, DE, EF, FA\}$$

şeklindedir.

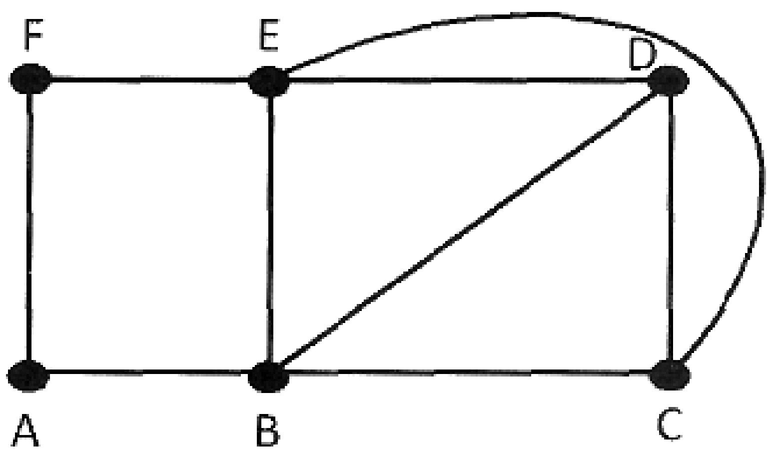
- Tahmin edileceği gibi Şekil 5’te verilen graf, ilk dört şekildeki olaylar dışında da birçok olayı modellemede kullanılabilir.
- Örneğin; bu graf, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ve *F* kulüplerinin katıldığı bir turnuvadaki mücadeleleri temsil ediyorsa bu ligde *A* takımı *B ve F* takımlarıyla, *C* takımı ise *B*, *D ve E* takımlarıyla karşılaşacak demektir.
- O halde bir graf soyut anlamda belli sayıda noktanın birbirleriyle nasıl birleştirildiğini gösteren bir temsilden başka bir şey değildir.

- Burada noktaların büyüklükleri önemli değildir. Sadece hangi noktaların hangi noktalarla birleştirildiği önemlidir.
- Yani bir graf aslında noktalar arasındaki ilişkileri belirtir.
- Bu özelliği ile bir graf bir şehrin metro haritasına benzer.
- Karayolları haritalarından farklı olarak bir metro haritasında tüm duraklar birer nokta ile (bazen küçük bir çember veya elips ile) duraklar arasındaki metro hatları da çeşitli renklerdeki ve kalınlıklardaki çizgilerle gösterilir.
- Duraklar arasındaki mesafeler gerçeği yansıtmaz.
- Haritada eşit uzaklıktaki duraklar arasında, gerçekte çok farklı mesafeler olabilir (bkz. Şekil 6 ve 7).


Şekil 6: İstanbul Metrosu

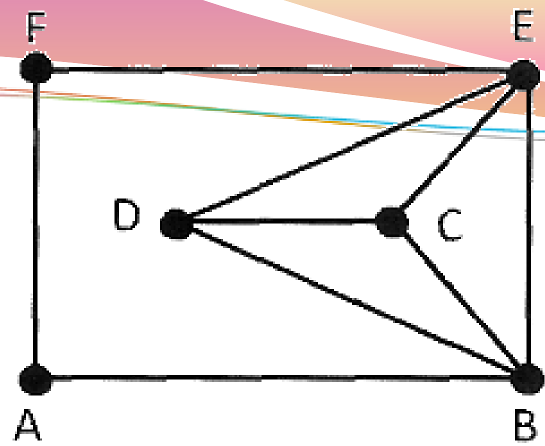

- **Şekil 7: Londra Metrosu**

- Bir grafı, farklı şekillerde çizmek mümkündür.
- **Örneğin;** yukarıda belirttiğimiz ve kesişiyor görünmeleri sebebiyle karışıklığa sebep olabilecek *BD* ve *CE* kenarlarını kesiştirmemek de mümkündür:




- **Şekil 8: Şekil 5'e farklı bir bakış**

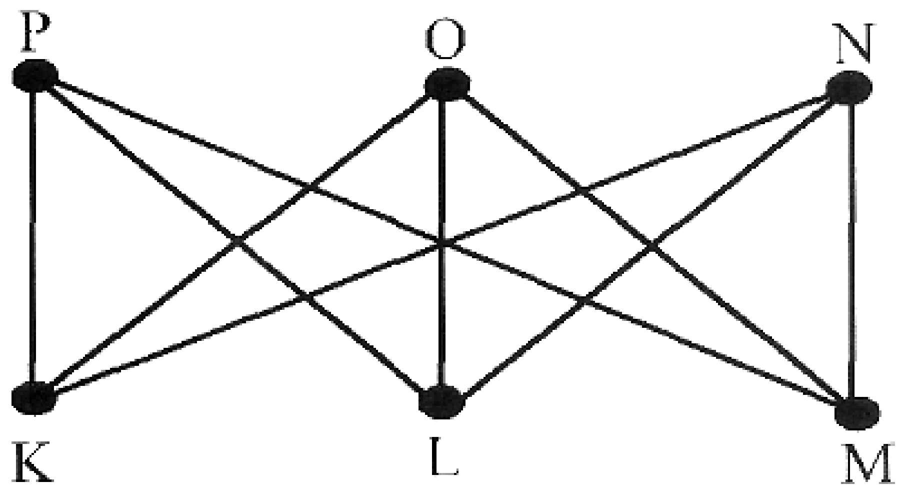
- Düz olmayan *CE* kenarı hoşumuza gitmediyse aynı grafı Şekil 9'daki gibi de çizebiliriz.



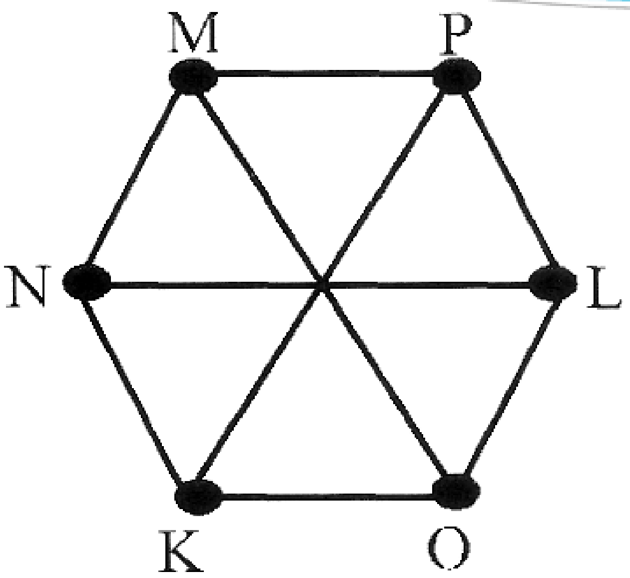

- **Şekil 9: Şekil 5’e farklı bir bakış daha**

- İlk bakışta farklı görünseler de Şekil 5, 8 ve 9’daki grafları aynı kabul edeceğiz.
- Genelde de iki grafın birisinde birleştirilmiş olan köşe ikilileri diğerinde de birleştirilmişse bu grafların aynı graflar olacağı açıktır.
- Bu da kenar ve köşe sayısı arttıkça karmaşıklaşan bir problemi karşımıza çıkarır: Çok farklı görünen iki grafın aynı olup olmadığını nasıl belirleriz?

- **Örneğin;** tesisat problemi olarak da bilinen önemli bir problemde *K*, *L*, *M* ile göstereceğimiz üç eve bağlantılar birbirini engellemeyecek (kesmeyecek) şekilde su, elektrik ve doğalgaz *(N*, *O*, *P)* tesisatlarını bağlamak istediğimizde Şekil 10 ve 11'deki graflar elde edilir.

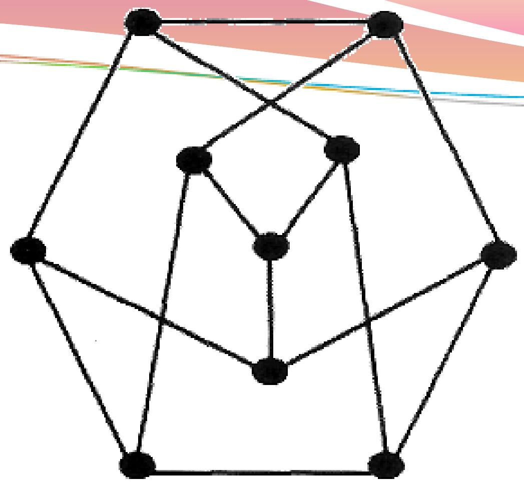



- **Şekil 10: Tesisat problemi**

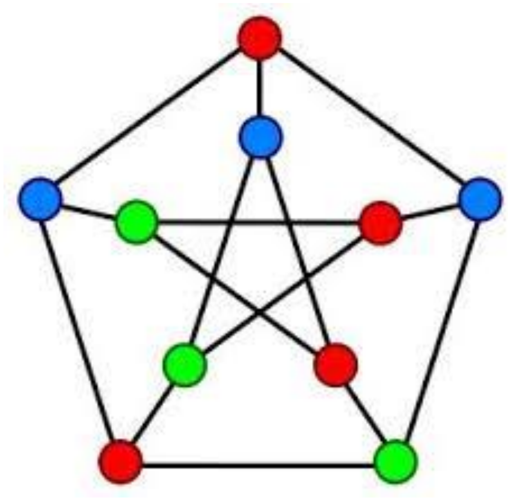



- **Şekil 11: Tesisat problemine farklı bir bakış**

- Dikkatlice incelersek bu iki grafın da aynı olduğunu fark ederiz.
- Benzer şekilde Şekil 12 ve Şekil 13'deki iki graf da, ilk bakışta oldukça farklı durmakla birlikte aynı graftır:



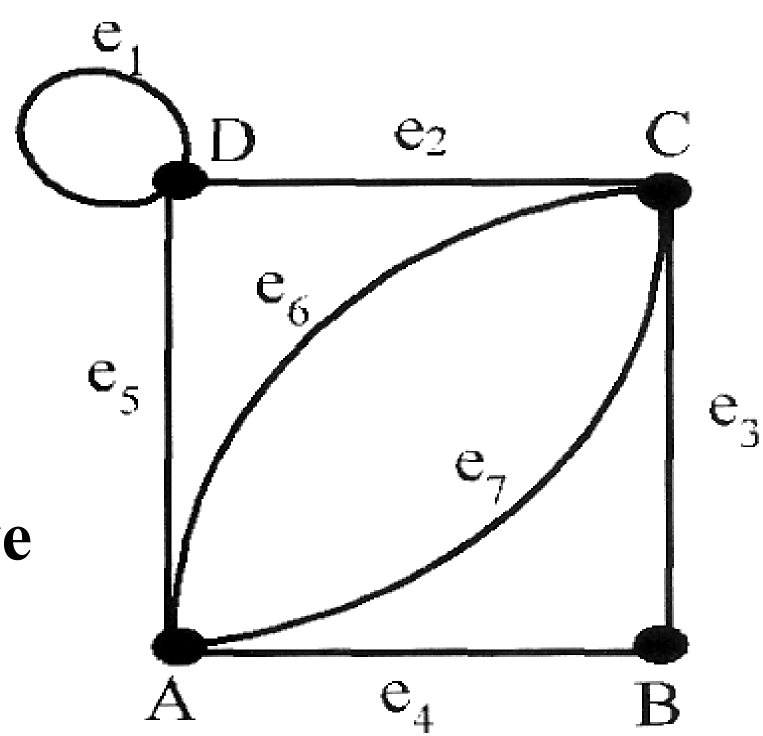
- **Şekil 12: Petersen grafı**



- **Şekil 13: Petersen grafının farklı bir görünümü**

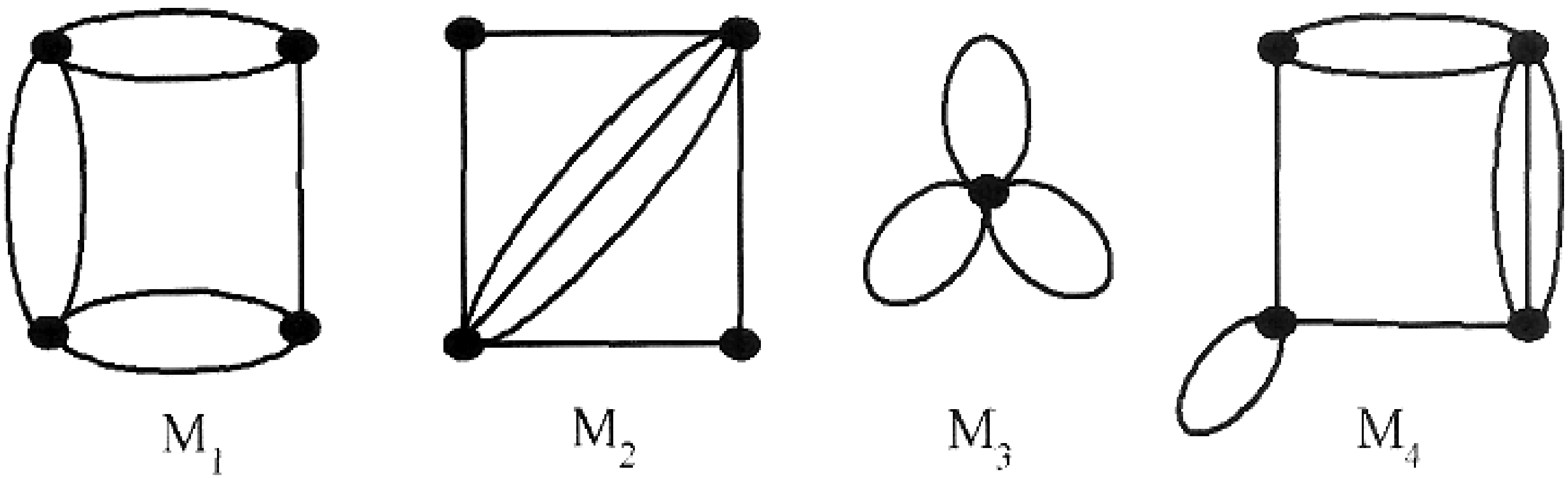
- Graf teoride, böyle graflar için eş yapılı anlamına gelen “izomorfik” kavramı kullanılır.
- Grafların birçoğunda komşu iki köşe sadece bir tek kenarla birleştirilir. Benzer şekilde bir kenarın iki köşesi de genelde birbirinden farklıdır.
- Daha fazla ilerlemeden önce zaman zaman karşımıza çıkacak olan bazı istisnai durumları ele alalım.
- Bunun için iki özel kenar çeşidini tanımlayacağız.
- *G* grafının bir *e* kenarının her iki ucu da aynı *v* köşesi ise bu kenara *v* **köşesinde bir döngü** ya da kısaca bir **döngü** (veya **ilmek)** denilir.

- *G* grafının komşu iki *u* ve *v* köşesi birden fazla kenar ile birleştiriliyorsa bu kenarlara **çoklu (paralel) kenarlar** denilir. Çoklu kenarlar bulunduran bir grafa **çoklu graf** adı verilir.
- Şekil 14'de *e*1 kenarı bir döngü, $e_6$ ve $e_7$ kenarları ise çoklu kenarlardır.



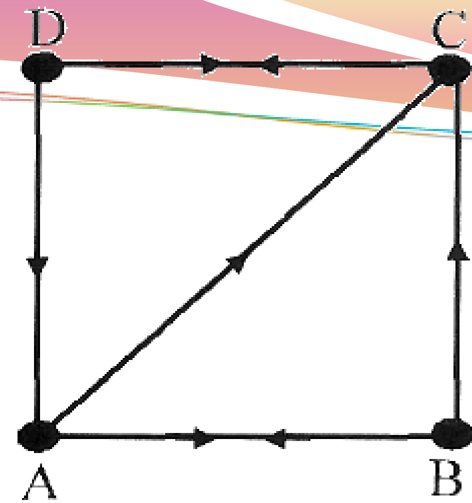

- **Şekil 14: Çoklu kenarlar ve döngü**

- En az bir çoklu kenara ve/veya döngüye sahip olan bir grafa **grafımsı** adı verilir. Herhangi bir köşede birden fazla döngü yer alabilir.
- Şekil 15'de $M_1$ ve $M_2$ çoklu graflar olup dört şekil de birer grafımsıdır.




- **Şekil 15: Çoklu graf ve grafımsılar**

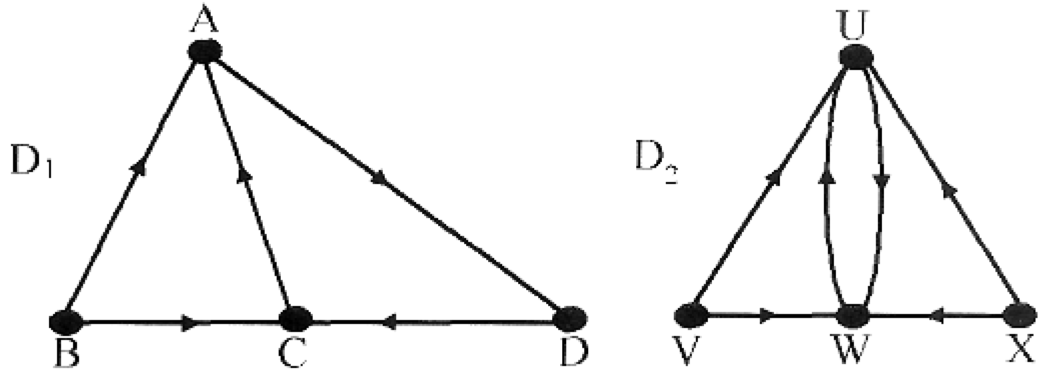
- Bizim incelediğimiz graflar sonlu, yönlü olmayan, çoklu kenar ve döngü içermeyen graflar olup böyle graflara **basit graf** denir.
- Bazı olaylar, graflar yardımıyla temsilde, şimdiye kadar çizdiğimiz graflardan farklı olarak kenarlarında oklar bulunan graflar ile gösterilir.
- Bu tür graflar, iki köşe arasındaki ilişkinin tek taraflı veya karşılıklı olduğu, kısacası aradaki ilişkinin yönünün önemli olduğu örneklerde kullanılır.
- **Örneğin;** trafiğin bir yönde aktığı tek yönlü bir yol, farklı sayıların büyüklük sıralaması, kişilerin birbirini sevmesi gibi, bkz. Şekil 16.




- **Şekil 16: Yönlü kenarlar**

- Bu tür graflar özel bir graf tipi oluşturmaktadır:
- *V* bir köşe kümesi olsun. Buraya kadar olan kısımda kenarlar, köşelerin sıralı olmayan ikilileriydi.
- Farklı olarak şimdi *E* kümesini V'deki farklı köşelerin sıralı ikililerinden oluşturalım.
- Bu durumda *E* kümesinin elemanlarına **yönlü kenarlar** denilir.
- *(u, v)* ikilisi bir yönlü kenar ise bu durum *uv* kenarı üzerine u'dan v'ye yönelmiş bir ok konularak gösterilir.

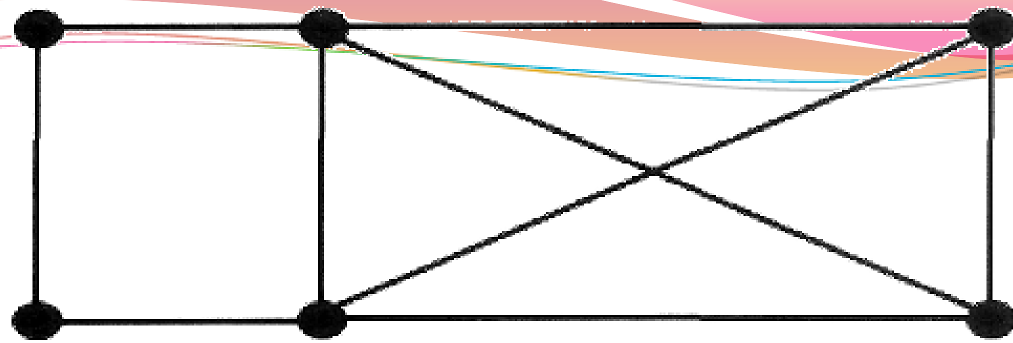
- Kenarları yönlü kenarlar olan graflara **yönlü graf** adını vereceğiz, bkz. Şekil 16. Bazı yönlü graflarda hem *(u, v)* hem de *(v, u)* kenarı bulunabilir.
- Şekil 16'daki *AB* kenarı gibi.
- *(u, v)* bir yönlü kenar ise nadiren de olsa *u* **köşesi** *v*'ye **komşudur** ve benzer şekilde *v* **köşesi** *u*'**dan komşudur** vurgusunu yaparak kenarın yönünü belirteceğiz, *u ve v* köşelerine yönsüz graflarda olduğu gibi *(u, v)* kenarına bitişiktir de denir.




- **Şekil 17: Yönlü graflar**

- İsim olarak yönlü grafa çok benzeyen bir graf türü daha mevcuttur.
- Bir yönlü grafta farklı *u* ve *v* köşelerinin oluşturduğu her bir köşe ikilisi için *(u, v)* ve (*v*, *u)* kenarlarından sadece birisi yönlü bir kenar ise bu yönlü grafa aynı zamanda **yönlendirilmiş graf** adı verilir.
- Yani bir yönlendirilmiş *D* grafı, bir *G* grafının her bir kenarına tek taraflı bir yön vermekle elde edilecektir.
- Şekil 17'deki $D_1$ ve $\mathrm{D}_2$ grafları yönlü graflara örnektir, ancak $D_1$ yönlendirilmiş bir graf olsa da $D_2$ yönlendirilmiş bir graf değildir.
- Yönlü graflar dışında zaman zaman karşılaşılan bazı graf tipleri daha mevcuttur.

- Bunlardan en yaygın olan iki tanesi çoklu graflar ve grafımsılardır. Şimdi bu iki kavramı tanımlayalım:
- Buraya kadar ele aldığımız graflar arasında Şekil 15'dekilerin çizilmesinde diğerlerine göre bir farklılık olduğu dikkatinizi çekmiş olmalıdır.
- Bu şekildeki grafların köşelerine isimlendirme yapmadık.
- Şekil l, 2, 3 ve 4'e baktığımızda bu dört olaydaki köşelerin farklı olduğunu görürüz.
- Ancak graf dilinde köşe ve kenar sayıları aynı olan bu graflar daha önce de kısaca açıkladığımız gibi bir anlamda aynıdırlar.
- Köşelerin isimlerini vurgulamamızın önemi olmadığında Şekil 5'teki grafı Şekil 18'deki gibi de çizebiliriz:



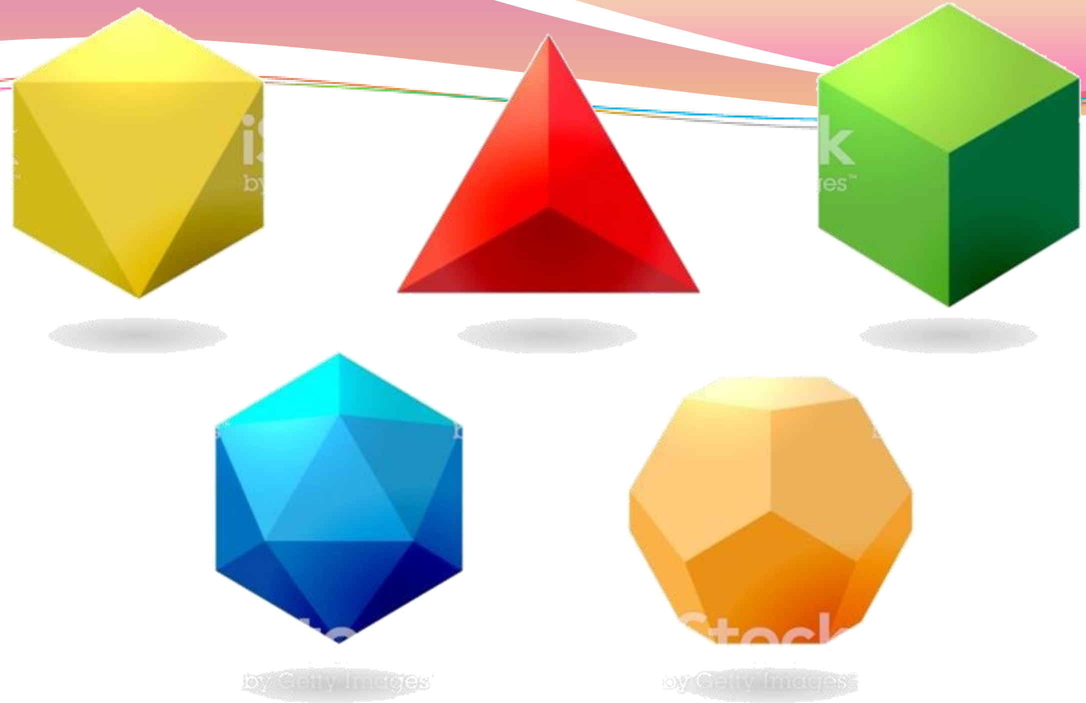
- **Şekil 18: Şekil 5’teki grafın etiketlenmemiş hali**

- Köşelerin isimlendirildiği graflara **etiketlenmiş graf;** Şekil 15 ve 18’deki gibi köşeleri isimlendirilmemiş graflara da **<u>etiketlenmemiş graf</u>** adı verilir.
- Buraya kadar olan kısımda sezgisel olarak grafın ne olduğunu anlamaya çalıştık.
- Birbiriyle hiç alakası yokmuş gibi görünen birçok olayın aynı graf ile temsil edilebileceğini gördük.

- Aslında burada grafların aslında gerçek hayattaki olayların matematiksel modelleri oldukları ve bu modellerin matematiğin çeşitli alanlarında var olan teoriler yardımıyla çalışılmasıyla elde edeceğimiz matematiksel değer ve sonuçlardan faydalanarak grafların temsil ettiği gerçek olaylara ilişkin fikir yürütebileceğimiz olacaktır.
- Kolay anlaşılır ve oldukça önemli bir örnek vermek istediğimizde ilk akla gelecek olanlardan biri Kimyasal Graf Teorisidir.
- Bu teori, bir molekülün sahip olduğu özellikleri laboratuar ortamında oldukça vakit alıcı, hataya açık ve masraflı yöntemlerle çalışmak yerine bu moleküle karşılık gelen "moleküler" grafın matematiksel özelliklerini çalışmamızın yeterli olduğu fikrine dayalı olarak gelişmiştir.

## Grafların Tarihçesi

- Neredeyse tüm Graf Teori kitaplarının girişinde bu teorinin ilk örneği olarak Königsberg köprüleri problemi verilir.
- Ancak bilinen ilk graf örnekleri Pisagor okuluna kadar geri gitmektedir (M. Ö. 300).
- Pisagorcular, ileride teknik olarak regüler, düzgün ya da kurallı olarak adlandıracağımız bir özelliğe sahip tüm üç boyutlu cisimlerin sadece 5 tane olduğunu gözlemlemişlerdir.
- Daha sonra Plato (Eflatun) ve öğrencilerinin detaylı bir şekilde çalıştığı bu cisimlere **Platonik cisimler** adı verilir. Şekil 19'da beş Platonik cisim görülmektedir:



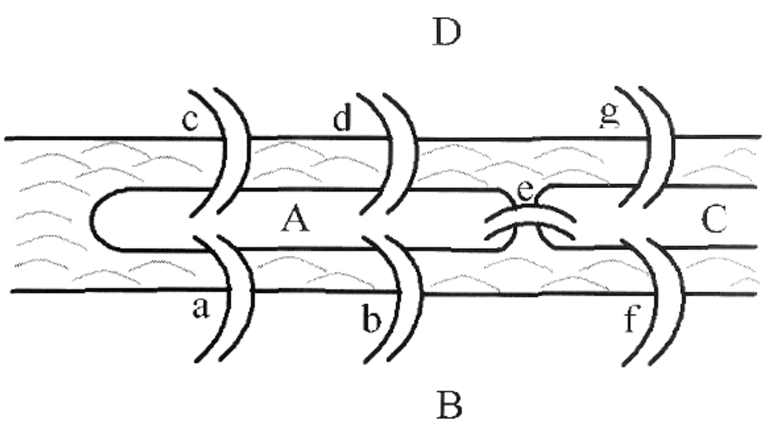
- **Şekil 19: Platonik cisimlerin 3 boyutlu görünümü**

- Bu cisimlere sırasıyla düzgün **dört yüzlü, düzgün altı yüzlü veya küp, düzgün sekiz yüzlü, düzgün oniki yüzlü** ve **düzgün yirmi yüzlü adı** verilmektedir.
- Bu beş adet üç boyutlu cismi kenarlarını kesiştirmeden iki boyutlu olarak da çizmek mümkündür.

- Sezgisel olarak üç boyutlu bir cismin **regüler** olması, tüm köşe ve yüzlerinin birbirine benzemesidir.
- Daha açık ifade etmek gerekirse, regüler bir sekilin her bir köşesinde eşit sayıda kenar bulunur ve kenarların birleşmesiyle oluşan yüzlerden her birisi eşit sayıda kenara sahiptir.
- **Örneğin,** küp bir üç boyutlu regüler cisimdir. Çünkü her bir köşede 3 kenar (ve 3 yüz) buluşmakta ve küpün her bir yüzü düzgün dörtgenlerden (karelerden) oluşmaktadır.

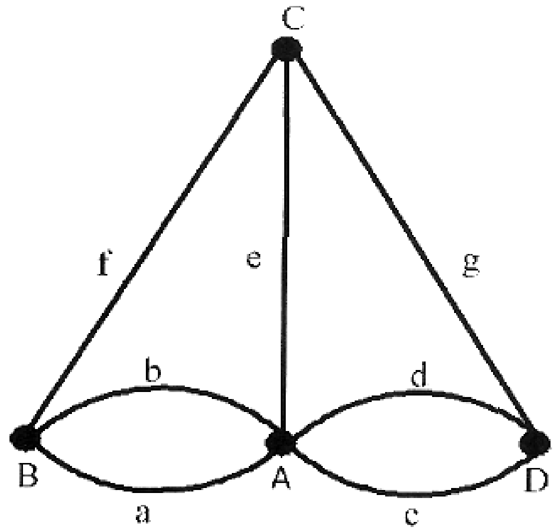
- Platonik cisimlerden sonra üzerinde sistematik olarak çalışılan ve yayınlanan ilk bilinen örnek, İsveçli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783)'in 1736'da yayınladığı "Königsberg'in Yedi Köprüsü" adlı çalışmaya adını veren köprü problemidir.
- Bu çalışmanın girişinde Euler, problemi şu şekilde tanımlar:
- Prusya (bugünkü Beyaz Rusya)'daki Königsberg (bugünkü Kaliningrad) kasabasından geçen Pregel nehri iki dala ayrılarak Kneiphof adasının iki tarafından geçmektedir (bkz. Şekil 21).
- Nehir üzerine yedi adet a, *b*, c, *d*, *e*, *f ve g* köprüleri inşa edilmiştir.

- Problem, bir kişinin bir noktadan yürüyüşe başlayıp tüm köprülerden birer kez geçerek başladığı noktaya geri dönüp dönemeyeceğini incelemektedir.
- Birçok kaynağa göre Königsberg halkı, böyle bir gezinin mümkün olup olmadığını araştırırken aynı zamanda eğleniyorlardı.




- **Şekil 21: Königsberg köprüleri**

- Harita üzerinde çizili olan Königsberg kentini oluşturan dört kara parçasını ve yedi köprüyü graf dilinde Şekil 22'deki gibi gösterebiliriz:




- **Şekil 22: Königsberg köprü probleminin graf gösterimi**

- Euler, o zamanlar Königsberg halkı için eğlenceli bir oyun olan bu problemi genelleştirmiş ve hangi hallerde böyle bir yolun bulunabileceğini belirlemiştir.

- Özel olarak, bir Königsberg vatandaşı ne yaparsa yapsın her bir köprüden birer kez geçerek başladığı noktaya dönemez.
- Grafların geçmiş ve iyi bilinen uygulamalarından bir diğeri, muhtemelen dört renk problemidir. 1852 yılında Francis Guthrie, tüm haritaların, komşu ülkeler aynı renkle boyanmayacak şekilde dört renk ile boyanabileceğini iddia etti.
- Guthrie, meşhur İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton'un öğrencisiydi ve Hamilton bu problemi Augustus de Morgan'a bir mektupla sordu.
- Böylece haritacıların pratikte bildiği ve uyguladığı bu özelliğin matematiksel ispatına yönelik çalışmalar başlamış oldu.

- Probleme ilişkin ilk basılı referans 1878'de Cayley tarafından yazılmıştı. Kempe 1879 da bir ispat yayınlandıktan sonra bir süre problem çözüldü diye düşünüldü.
- Ancak 1890'da Heawood, ispatta bir eksiklik tespit etti ve problemin, biraz daha zayıf hali olan "her haritanın beş renk ile boyanabileceği" iddiasını ispatlamayı başardı.
- Bu durum çok geçmeden diğer matematikçilerin probleme iştahını tekrar kabarttı.
- Matematik tarihinde en uzun süre ispatlanamayan teorem olan Fermat'nın son teoremine, ifade edilişinin basit, ispatınınsa zor olmasıyla benzeyen dört renk problemi;

- 1976’da Appel ve Haken tarafından bir algoritma kullanılarak ispatlanana kadar çok sayıda denemeye sahne oldu ve bu da dört renk problemini, matematiğin ispatı en uzun süren ikinci teoremi yaptı.
- 1922’de bir başka ciddi deneme, Birkhoff tarafından ortaya konuldu ve buna dayalı olarak Franklin, dört renk problemini en çok 25 bölge bulunduran tüm haritalar için ispatladı.
- Birkhoff’un çalışmaları, daha birçok ciddi adımın atılmasını sağladı. Bunlar arasında en önemlisi 1969’da Heesch tarafından ortaya konulan sonuçlardır.
- Appel ve Haken’in Heesch’in çalışmalarına dayalı olan ispatı, ciddi anlamda bilgisayar kullanımı gerektiriyordu ve olası 1476 harita türünün analiz edilmesine dayalıydı.

- Matematikte çok sayıda kabul görmüş ispat metodu vardır ve bilgisayarla ispat bunlardan birisi değildir.
- Bu nedenle Appel ve Haken’in ispatını pek çokları gerçek bir ispat olarak görmedi. Çünkü bilgisayarla yapılan işlemlerin elle de doğrulanması gerekiyordu ve bu mümkün değildi.
- Dört renk probleminin Appel ve Haken tarafından yapılana benzer, fakat çok daha kısa olan yine bilgisayar destekli bir başka ispatı 1995’de Robertson, Sanders, Seymour ve Thomas tarafından yapıldı.
- Bu dört renk probleminin detayları için literatüre bakılabilir.
- Graf Teorinin tarihine imza atan bu üç problemin yanısıra daha birçok problem mevcuttur.

- Bunlar arasında pazarlamacı problemi, labirent problemleri, tesisat problemi, network problemleri, el sıkışma problemi, atlı tur problemi, el kaldırmadan çizilebilme problemi, dört küp problemi, postacı problemi sayılabilir.
- Bu problemlerden bazılarının çözümlerine ilişkin kısa bilgiler vereceğiz.

**Graf Uygulamaları**

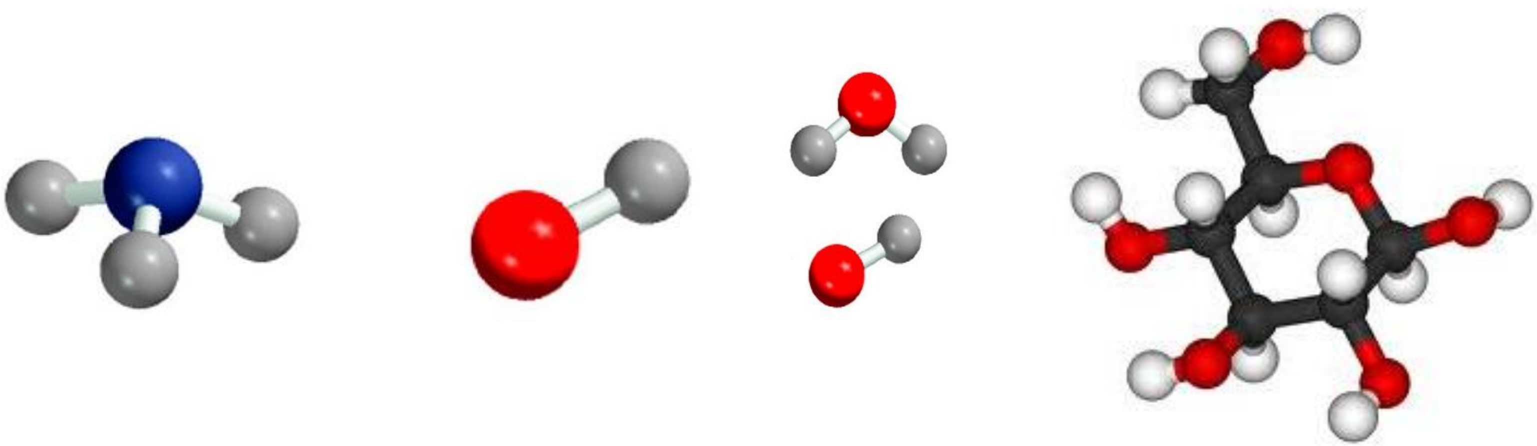
- Bu kısımda grafların uygulandığı çok sayıda alandan birkaçını, teorinin pratikteki önemini ve kullanım alanlarının çokluğunu vurgulayabilmek amacıyla vereceğiz.

- Bu uygulamalar arasında fen, sosyal ve sağlık bilimlerinden çocuk oyunlarına, arz-talep problemlerinden trafik akış planlamasına birçok örnek yer almaktadır.

**Kimyasal Graflar**

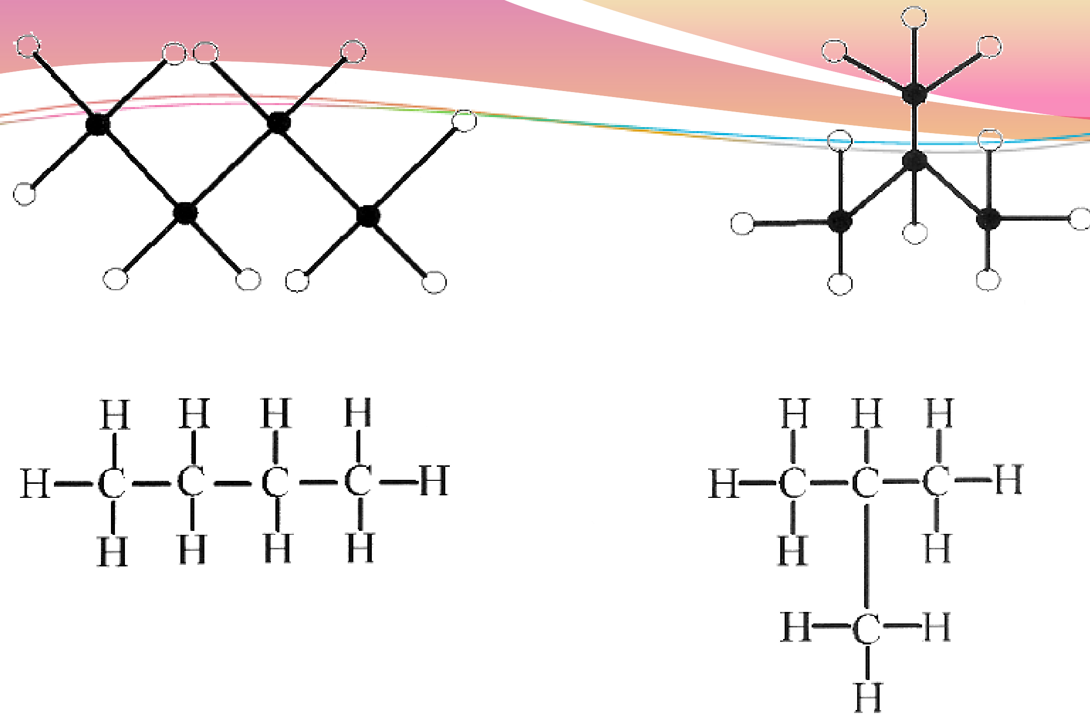
- Evrendeki tüm maddelerin, atomlardan ve moleküllerden oluştuğunu biliyoruz.
- Moleküller, birbirine bağlı gruplar halindeki atomlardan oluşan kimyasal bileşiklerin en küçük temel yapısıdır.
- **Örneğin;** bir madde olarak su *(H2O)*, iki hidrojen ve bir oksijen atomunun belli bir düzende bir araya geldiği moleküllerden oluşur.

- Benzer şekilde nitrojen ($N_2$); iki azot atomundan; ozon ($O_3$), üç oksijen atomundan;
- tuz *(NaCl)*, bir sodyum ve bir klor atomundan; glikoz *($C_6H_{12}O_6$)* ise altı karbon, on iki hidrojen ve altı oksijen atomundan oluşan moleküllerin bir araya gelmiş halidir.



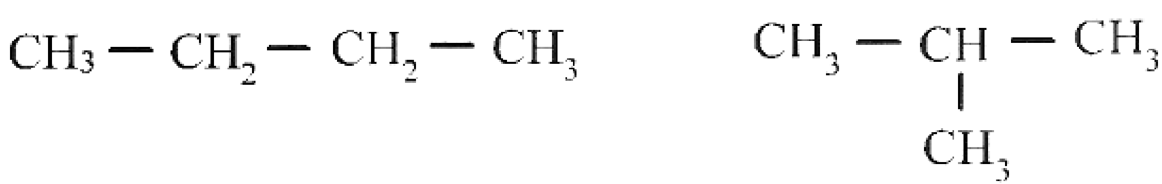
- **Şekil 23: $H_2O$, $O_3$, *NaCl*, $N_2$ ve $C_6H_{12}O_6$ molekülleri**

- Doğal olarak atom ve molekülleri çalışmak her ne kadar kimyanın ve fiziğin konusu gibi görünse de, tekstilden elektroniğe, genetikten farmakolojiye, moleküler düzeyde çalışmalara ihtiyaç duyulan tüm alanlarda da oldukça önemlidir.
- Bir fabrika, üretim sürecinde örneğin soğutmada ya da ısıtmada kullanması gereken bir kimyasal sıvıyı seçmek isteyebilir.
- Bir başka fabrika geliştirmeye ve piyasaya sürmeye hazırlandığı bir ilaç türü için kullanacağı bütan *($C_4H_{10}$)* izomerini belirlemek isteyebilir.
- **İzomerler,** aynı kimyasal formüle sahip, fakat atomlarının dizilişi farklı olan moleküllerdir. Örneğin bütan molekülü, Şekil 24’de görülen iki izomere sahiptir:



- **Şekil 24: Bütan ve izobütan izomerleri**

- $C_4H_{10}$ kimyasal formülüne sahip bu iki izomerden ilki bütan, ikincisi de izobütan olarak adlandırılır. Bu iki dizilimi

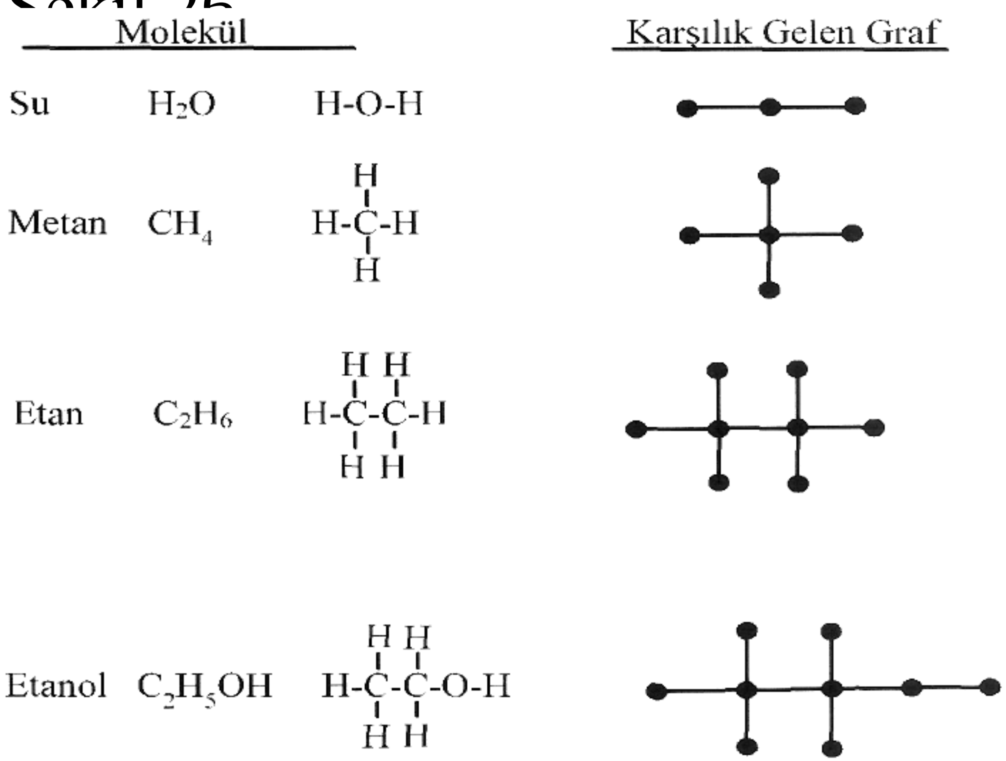


- **Şekil 25: Bütan izomerleri**

olarak da ifade edebiliriz. Bu dizilimlerden ilkine **düz zincir dizilimi;** ikincisine de **dallanmış zincir dizilimi** adı verilir.

- Amacı ne olursa olsun çeşitli moleküller ya da aynı molekülün izomerleri arasında tercih yapmak, oldukça masraflı, vakit alıcı ve özel cihazlar gerektiren bir süreçtir.
- Genelde bir laboratuar ortamında oldukça pahalı aletlerle ve hata yapıldığında tekrar baştan başlanılmasını gerektiren bu süreç nedeniyle bilim insanları daha pratik yöntemler geliştirmeye çalışmışlardır.
- Bunlar arasında oldukça karmaşık geometrik, elektrostatik ve kuantum kimyasal yöntemler ilk akla gelenlerdir.

- Şimdi Graf Teorinin nerede işin içine girdiğini anlamaya çalışalım.
- Her bir molekülü adına **kimyasal (ya da moleküler) graf** diyeceğimiz bir graf ile göstereceğiz.
- Bu grafın köşeleri moleküldeki atomlara, kenarları ise atomlar arasındaki kimyasal bağlara karşılık gelir, bkz. Şekil 26

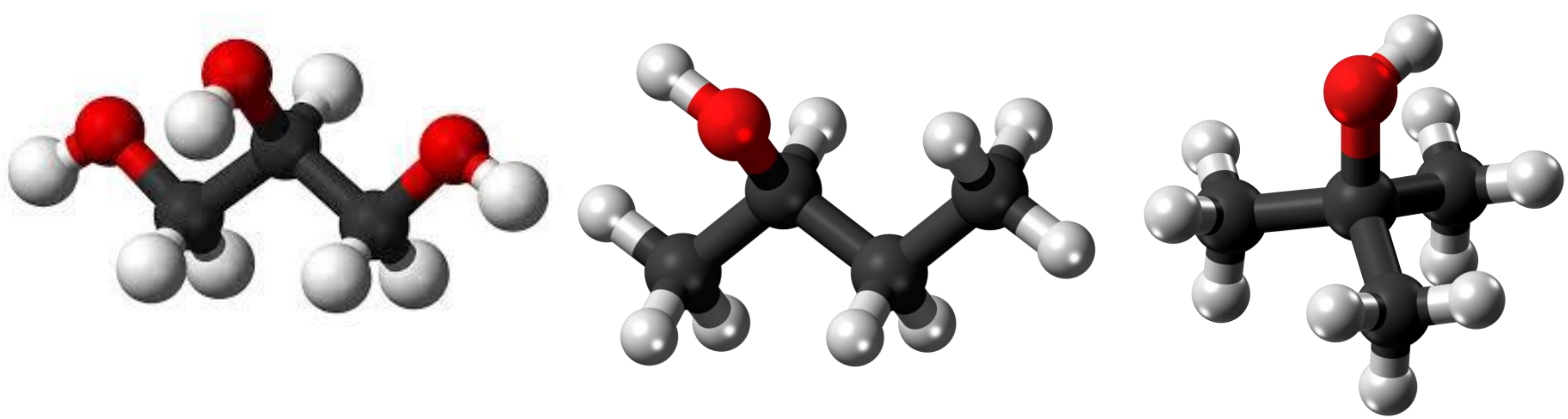



- **Şekil 26: Bazı moleküler graflar**

- Moleküllerin bu şekilde graflarla gösterilmesi, ilk olarak 1864 yılında Alexandre Crum Brown (1838-1922) tarafından kullanılmaya başlanmıştır.
- İzomerlerin varlığı da Brown tarafından keşfedilmiştir.
- Moleküllere kolayca eşlenen bu graflar, ilk bakışta basit çizimler gibi gelebilir ve işe yaramayacağı düşünülebilir.
- Fakat bu basit çizgilerin matematiksel yorumlanması, birçok alanda zaman ve maliyeti ciddi derecede azalttığı için, her geçen gün popüler hale gelmeye başlamıştır.
- Moleküler karbon graflarının en dikkat çekici özelliği her bir köşeden çıkan kenar sayısının dörtten fazla olamayacağıdır.

- Moleküler grafları kullanmanın önemini vurgulayabilmek için aşağıdaki bilgileri hatırlayalım.
- ABD’deki FDA kısaltmasına sahip Yiyecek ve İlaç Yönetimi Merkezi, yılda yaklaşık 25 yeni ilacın kaydedildiğini ve yeni bir ilacı geliştirmenin maliyetinin ortalama 5 milyar dolar olduğunu açıklamıştır.
- Kutuplaşma, simetri ve Van der Waals dağılım kuvveti gibi teknik terimlere çok girmeden bir örnek verelim.
- Pentan izomerlerini düşünelim. Bunlar Şekil 27’de görülen ve $C_5H_{12}$ formülüne sahip alkanlardır.
- Bir ilaç şirketinin üreteceği ilaç için pentan kullanacağını ve bu pentan maddesini kaynatması gerektiğini düşünelim.

- Ticari olarak en ekonomik seçeneği tercih etmek gerekecektir. Bu da bu örnekte kaynama sıcaklığı en düşük olan izomerdir. Çünkü kaynatma, enerji gerektiren bir süreçtir ve kaynama derecesi yükseldikçe masraf artacaktır.



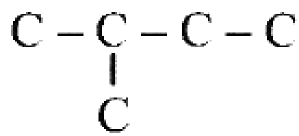
- **Şekil 27: Pentan izomerleri**

- Peki pentan izomerlerinden hangisinin (ve genelde kullanılması gereken bir kimyasalın hangi izomerinin) kullanımı daha ekonomiktir?
- Buna nasıl karar verebiliriz?
- Kimyacılara sorarsanız uzun yıllardır edindikleri bilgi birikimi ve tecrübeyle size bir molekülde dallanma arttıkça o molekülün daha düşük sıcaklıkta kaynayacağını söylerler.
- **Örneğin;** pentan 36 °C"de; izopentan (metilbütan ya da 2-metil bütan) 28 °C"de; neopentan (2,2-dimetilpropan) ise 9 °C"de kaynar.
- Dolayısıyla eğer bu üç izomerden birini tercih etmek gerekirse neopentanı tercih etmenin daha akıllıca olacağı aşikârdır.

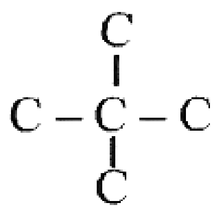
- Ancak izomer sayısı arttıkça bu iş sadece gözle bakarak yapılabilecek bir iş olmaktan çıkar.
- **Örneğin;** dekan *($C_{10}H_{22}$)* için 76 adet, triakontan *($C_{30}H_{62}$)* içinse 4.111.846.763 adet izomer mevcuttur. Bunca izomerden bir kaçını düz bir zincire yakın olan dizilişlerinden dolayı eleyebilsek de geriye kalan birçoğunun birbirine benzerliği nedeniyle hangisini tercih etmemiz gerektiğine karar veremeyiz.
- Bunun kolay bir matematiksel çözümü graf teori yardımıyla verilebilir.
- 1947'de H. Wiener, alkan moleküllerinin dallanmasını matematiksel olarak belirleyecek bir sayı tanımladı.

- **Wiener indeksi** olarak adlandırılan bu sayı bir molekülde hidrojen atomları dışındaki tüm atomları temsil eden köşeler arasındaki patikaların uzunluklarının toplamı olarak tanımlanır.
- İlginçtir ki bu sayı, molekülün dallanması ile ters orantılıdır. Yani dallanmanın en fazla olduğu moleküle karşılık gelen grafın Wiener indeksi en küçük olacaktır.
- Yukarıda öğrendiklerimizle birleştirdiğimizde Wiener indeksinin en küçük olduğu grafı bulmamızın, en düşük sıcaklıkta kaynayabilen izomeri bulmamızı sağlayacağı görülür.
- Şekil 28'de hidrojen atomları çıkarılmış pentan izomerleri görülmektedir.

Pentan



İzopentan



Neopentan

- **Şekil 28: Karbon graflar**

- Karbon atomları dışındaki atomların çıkarılmasıyla elde edilen bu tür graflara verilen molekülün **karbon grafı** denir.
- Karbon grafları, ileride göreceğimiz ve ağaç adını vereceğimiz graf türünün bir örneğidir.
- Ağaç graflar ya da kısaca ağaçlar, grafların en basit örnekleridir.

- Sezgisel olarak herhangi iki köşesi arasında kenar ve köşelerden ayrılmadan dolaşabildiğimiz bir grafa bağlantılı graf denilmektedir.
- Bu üç hidrojeni çıkarılmış izomerin Wiener indeksleri sırasıyla

$$4 \cdot 1 + 3\text{-}2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 20;$$

$$4 \cdot 1 + 4\text{-}2 + 2\text{-}3 = 18;$$

$$4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 16$$

olarak hesaplanabilir. Bu da ilaç firmasının basit bir matematiksel hesaplamayla pentan izomerlerinden en düşük Wiener indeksine sahip olan neopen-tanı tercih etmesinin akıllıca olacağını göstermektedir.

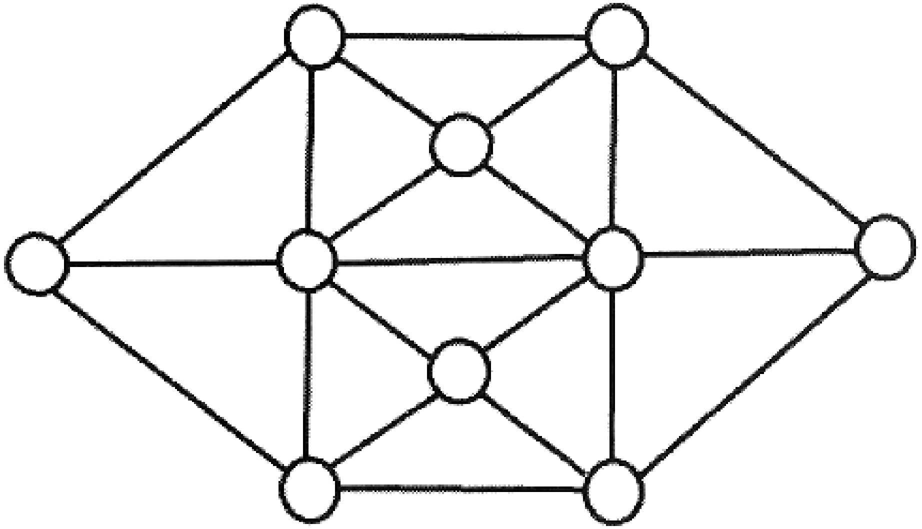
- Wiener indeksi dışında başka graf indekslerinin de varlığı söz konusudur.
- Tüm bu indeksler, graflara karşılık gelen moleküllerin değişik özelliklerini elde etmemize yardımcı olurlar.

**Bulmacalar**

- Aşağıda kısa kısa değineceğimiz birçok bulmacanın çözümü de Graf Teorideki kavramlar yardımıyla bulunabilir.
- Bunlardan en meşhuru sayılabilecek olan Königsberg köprü problemini tanıtmıştık.
- Aşağıda graflar yardımıyla çözülebilen diğer birkaç bulmacayı göreceğiz.

## Sekiz Çember Problemi

- Bu problemde l, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 rakamlarını Şekil 29'daki sekiz çemberin içine hiçbir sayı bir eksiği veya bir fazlasıyla bitişik olmayacak şekilde yerleştirip yerleştiremeyeceğimiz sorulmaktadır.

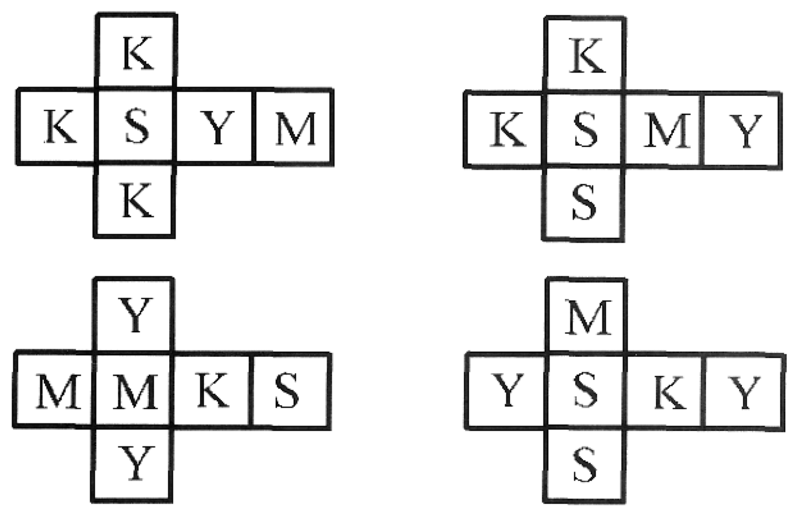


- **Şekil 29: Sekiz çember problemi**

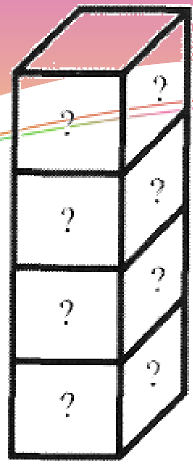
- Deneme yoluyla bu problemi çözmek istersek tam 8! = 40320 deneme yapmamız gerekir.
- Bunun da çok pratik bir çözüm yolu olmadığı açıktır.

**Dört Küp Problemi**

- Bu bulmacanın amacı, açılımları Şekil 30'da verilen ve dört farklı renk (Kırmızı, Mavi, Sarı ve Yeşil) ile boyanmış dört küpü her bir taraftan bakıldığında dört rengi de görecek şekilde Şekil 31'deki gibi üst üste dizip dizemeyeceğimizi belirlemektir.

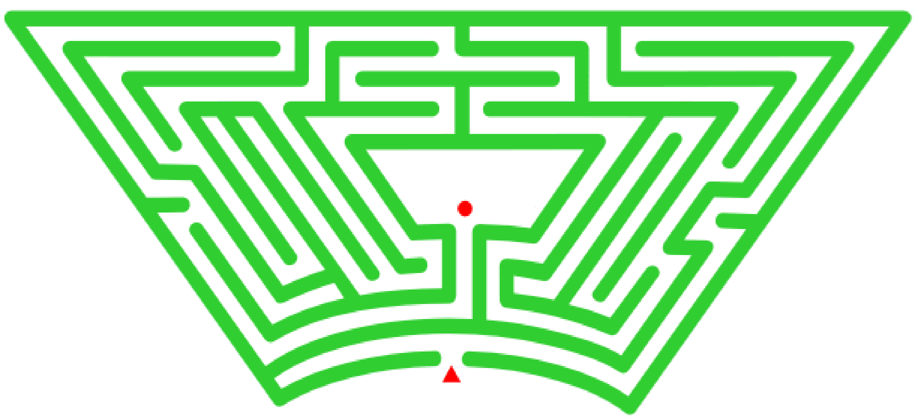



- **Şekil 30: Küp açılımları**




- **Şekil 31: Dört Küp problemi**

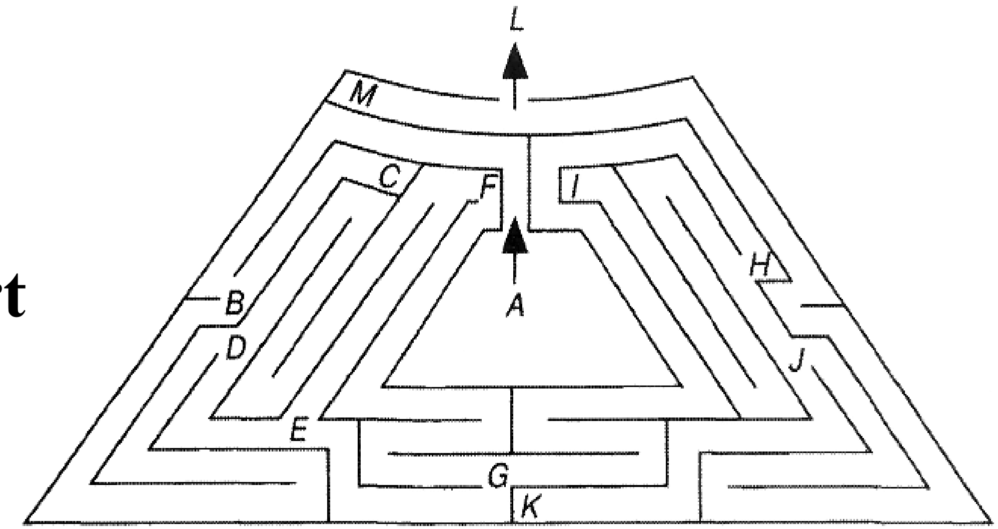
- Bu problemin çözümü de dört küpün her bir rengi bir köşe kabul eden birer graf ile temsil edilmesiyle yapılabilir.
- **Hampton Court Labirenti**



- **Şekil 32a: Hampton Court labirenti**

- Bu problemde 1700’lü yıllarda Kral Sekizinci Henry’nin sarayı olarak kullanılan Londra’daki Hampton Court’un bahçesinde yer alan ve birçoklarına göre dünyadaki en meşhur labirent olan bir labirentten nasıl çıkılabileceğine yönelik bir yöntem geliştirmemiz istenmektedir, bkz. Şekil 32a.
- Bunu yapmanın yolu da labirentin Şekil 32b’de A’dan L’ye harfler ile işaretlenmiş geçiş noktalarını birer köşe kabul eden bir graf çizmektir.

- **Şekil 32b: Hampton Court labirentinin çözümü**



**Sosyal Olaylar**

**Altı Kişilik Parti**

- Bu problemde altı kişilik herhangi bir toplantıda ya hepsi birbirini tanıyan üç kişinin, ya da hiçbiri diğer ikisini tanımayan üç kişinin bulunup bulunamayacağı sorulmaktadır.
- Bu problem de 6 kişiyi birer köşe olarak temsil ettiğimiz graflar yardımıyla çözülebilir.

**Evlenecek Çiftler Problemi**

- Örneğin 3 erkek ve 5 kızdan oluşan bir grupta her bir erkek 5 kızdan birini veya birkaçını tanısın.
- Bu 3 erkeğin tanıdıkları 3 kızla evlenmesi hangi şartlar altında mümkündür? Bu problem de graflardan faydalanarak modellenebilir ve çözülebilirdir.

## Tesisat Problemi

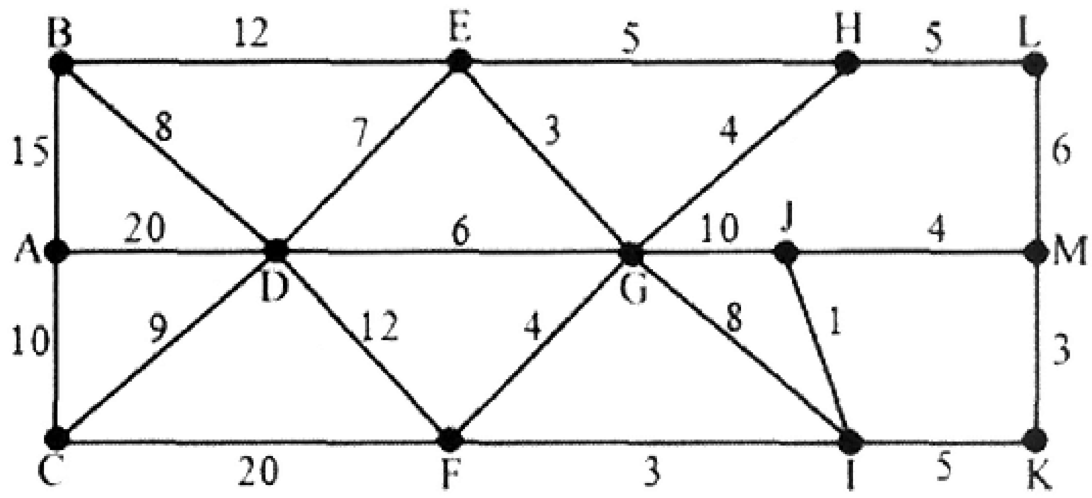
- Şekil 11'de üç evi elektrik, su ve doğalgaz şebekelerine bağlantılar birbirini kesmeyecek şekilde bağlamak istediğimizde oluşan durumun grafla gösterimi verilmişti.
- Bu örnek ev ve tesisat sayısı değiştirilerek ya da farklı kavramlar alınarak daha karmaşık hale getirilebilir.
- Şekil 10'da bu problemin graf gösteriminin oldukça farklı duran bir halini görmüştük.

## Sevgi Bağları

- Ali; Leyla, Fatma ve Nejla'dan; Hasan; Nejla ve Leyla'dan; Fatma da Hasan'dan hoşlanmaktadır.
- Bu ilişkileri bir arada göstermenin yolu bir graf çizmektir. Sevgi bazen tek taraflı, bazen karşılıklı olduğundan bu graf bir yönlü graf olacaktır.

- Aşağıda göreceğimiz üç problem, hem zaman hem de ekonomi açısından önemli olayları modellemektedir:
- **En Kısa Yol Problemi**
- Şekil 33'de verilen krokiyi ele alalım. Bu krokide harfler, *A* ve M şehirleri arasındaki kasabaları, sayılar ise aralardaki uzaklıkları göstermektedir. *A* şehrinden M şehrine gitmek isteyen birinin kullanacağı en kısa yolu bulmak isteyelim.

- **Şekil 33: En kısa yol problemi**



- Köşeler ve her birisine bir sayı atanmış kenarlardan oluşan bu krokinin aslında bir graf oluşturduğuna dikkat ediniz. Bazı olayları örneklemede bu tür graflar önemli yer tutmaktadır.
- Bir $G = (V, E)$ grafı verildiğinde eğer $E$ kümesindeki her bir kenara bir reel sayı atayan bir

$$w : E \rightarrow R$$

fonksiyonu varsa G grafına **ağırlıklı graf** adı verilir. Kenarlara atanan her bir sayıya o **kenarın ağırlığı** denilir.

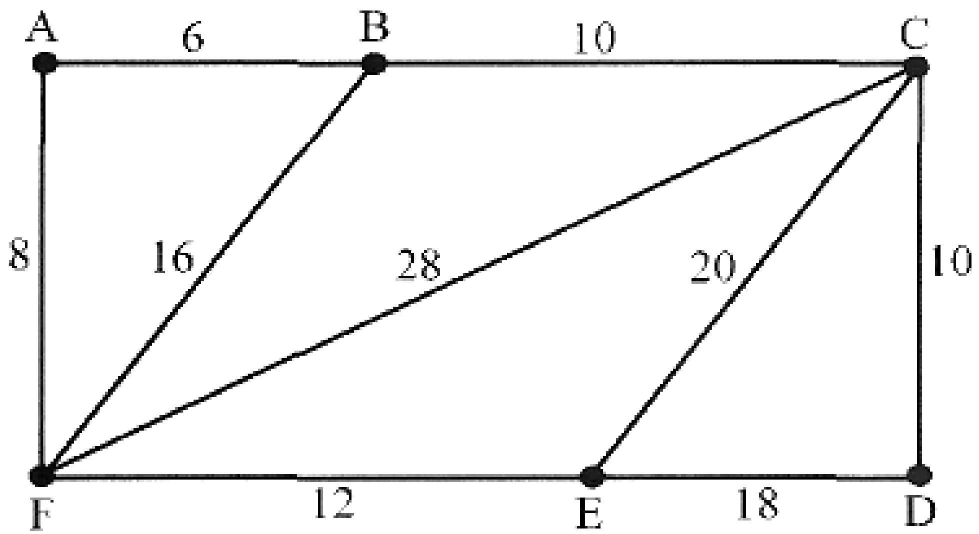
- Bu tür problemlerde aranan yolu bulmanın çeşitli yöntemleri vardır.
- **Örneğin;** soldan sağa hareket ederek her bir $V$ köşesine kadar olan mesafeyi giderek artan sayılarla işaretlersek aşama aşama $A$'dan $M$ şehrine giden en kısa yolu bulabiliriz.

- Aranan cevap *ACDGFIJM* yoludur ve 37 birim uzunluğundadır.
- Ağırlıklı graflara yer vermeyeceğimizden dolayı bu tür problemlerin detaylı incelemesini de yapmayacağız.
- Merak edenler kaynaklardaki kitaplara göz atabilirler.
- Ağırlıklı graf kavramı, aynı şekilde grafımsılar ya da yönlü graflar için de tanımlanabilir.

**Çinli Postacı Problemi**

- En kısa yol probleminin biraz farklı bir versiyonu Çinli bir matematikçi olan Mei-Ku Kwan tarafından ortaya atılan Çinli postacı problemidir.
- Bu problemde bir postacı belli sayıda cadde üzerindeki evlere posta dağıtmakta ve doğal olarak bunu en az yürümeyle yapmak istemektedir.

- Örneğin *A* noktasından başlayarak Şekil 34'deki tüm caddeleri ziyaret ederek yine *A* noktasına dönmek isteyen bir postacının *A'da* başlayıp *A'da* biten kapalı bir yol bulması gerekir.
- Tabii en kısa yolu seçmek için bir yöntem geliştirmesi de gerekir. Bunu yapmanın yolu da ağırlıklı graflardır.

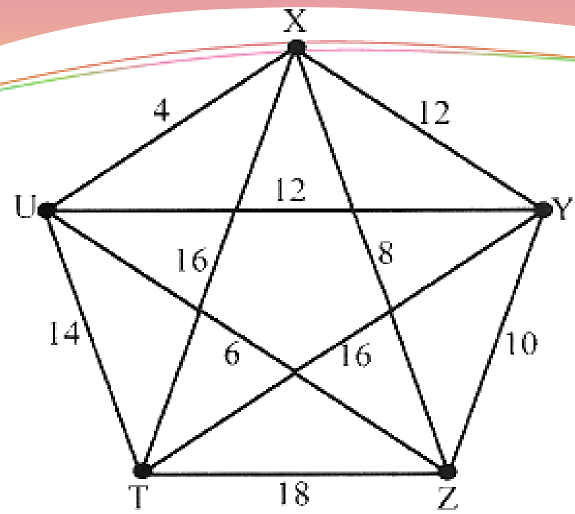



- **Şekil 34: Çinli postacı problemi**

- Bu tür problemlerin çözümünde Euler tarafından bulunan bazı algoritmalar oldukça kullanışlıdır. Burada postacının gideceği en kısa yol 148 birimdir.
- Bu tür problemleri kısaca 5. Bölümde ele alacağız.
- Konuyu detaylı anlamak isteyenler kitabın sonundaki kaynaklara bakabilirler.

**Dağıtıcı Problemi**

- Bu problemde ise bir ürün dağıtıcısının bir depodan aldığı malları çeşitli bayilere dağıttıktan sonra depoya geri dönmesi durumu ele alınmaktadır.
- Örnek olarak Şekil 35'de *X* deposundan hareket eden bir dağıtıcı *Y*, *Z*, *T* ve *U* bayilerine dağıtım yaparak *X* deposuna geri dönmek istiyor.




- **Şekil 35: Dağıtıcı problemi**

- Üstteki problemlerden farklı olarak burada önemli olan *X'den* çıkıp Y, *Z, T* ve *U* noktalarına uğrayarak *X:e* dönmektir ve geçilen yolların önemi yoktur.
- Burada aranan cevap *XUZYTX* kapalı yoludur ve toplam 52 birimdir.
- Son üç örnekteki problemler, her ne kadar birbirine benzese de üçünün de oldukça farklı olduğuna ve aranan yolların özelliklerinin de ciddi farklılıklar gösterdiğine dikkat ediniz.

## Oyunlar

- Domino oyununu hemen hemen hepiniz bilirsiniz, bkz. Şekil 36.

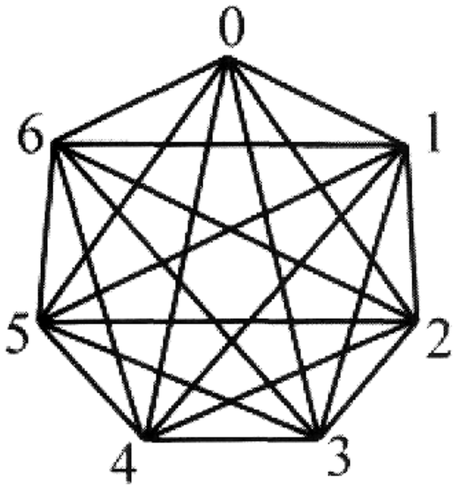

- **Şekil 36: Domino oyunu**

- Her biri iki bölmeden oluşan ve üzerlerinde 0 — 0, 0 — 1, 0 — 2, 0 — 3, O — 4, 0 — 5, 0 — 6, 1 — 1, l — 2, • • • ,5 — 5, 5 — 6 ve 6 — 6 sayı ikilileri işaretlenmiş 28 adet domino taşıyla oynanan iki kişilik popüler bir oyundur.
- Oyun, başlangıçta yedişer taşa sahip iki oyuncunun rakiplerindeki taşları tahmin edip akılda tutmaya çalışarak ve sırasıyla hamle yaparak elindeki taşları bitirmeye çalışmasını amaçlar.
- Elinde hamle yapacak taş olmayan oyuncu, uygun taşı bulana kadar ortadaki taşlardan almak zorundadır ki bu da taşları bir an önce bitirmek amaçladığından dezavantajlı bir durumdur.

- Sırası gelen oyuncu, o ana kadar sıralanmış domino taşlarının iki ucundaki sayılardan en az birine sahipse böyle bir taşı uygun uca yerleştirir ve sıra diğer oyuncuya geçer.
- Şekil 37’de tamamlanmış bir domino oyunu görülmektedir.

- **Şekil 37: Tamamlanmış bir domino oyunu**

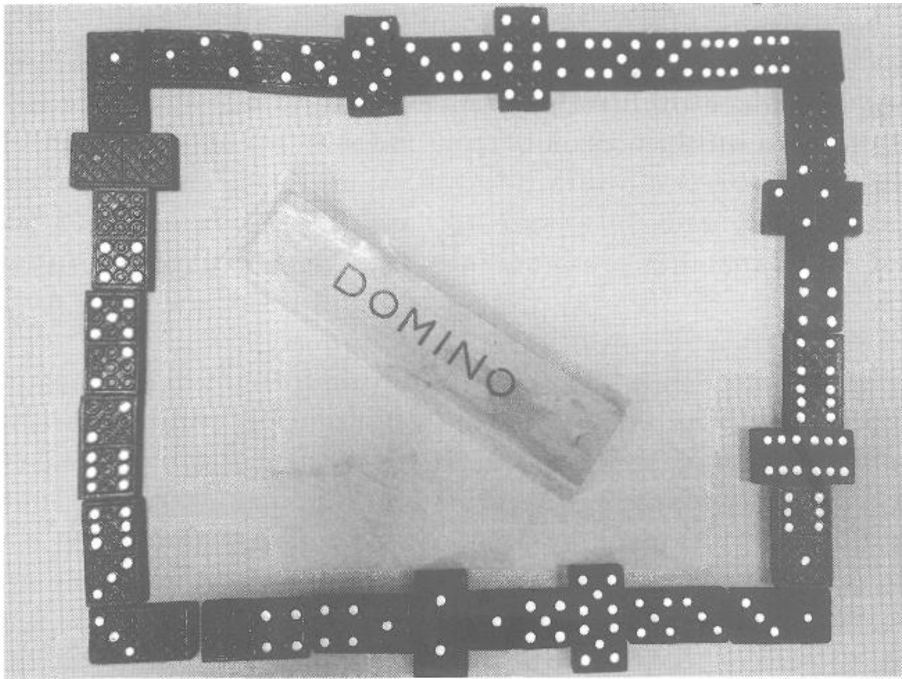
- Peki domino oyununun Graf Teori ile ne gibi bir ilişkisi bulunabilir?
- Aşağıdaki tam grafı düşünelim, bkz. Şekil 38:




- **Şekil 38: $K_7$ tam grafı**

- 7 bir tek sayı olduğundan $K_7$ bir Euler grafıdır. *$K_7$'nın,* köşelerini Şekil 137'deki gibi 0, l, 2, 3, 4, 5 ve 6 ile etiketleyelim.

- Çizilebilecek çok sayıda Euler devresinden birisi 12, 23, 34, 45, 56, 60, 02, 24, 46, 61, 13, 35, 50, 03, 36, ,62, 25, 51, 14, 40, 01 şeklindedir. Bunların her birisini birer domino taşına karşı getirelim.
- Bu durumda yukarıdaki diziliş Şekil 136'daki Euler devresini verecektir. 3-3, 4-4 gibi çift taşları da uygun yerlere yerleştirerek Şekil 138'deki Euler devresini elde ederiz:

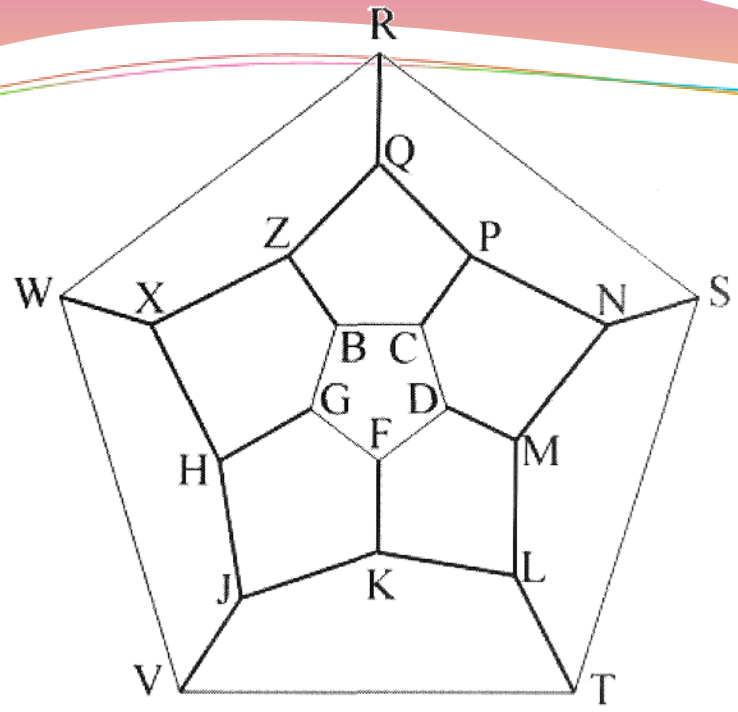



- **Şekil 39: Çiftler de kullanılarak tamamlanmış bir domino oyunu**

## Hamilton Grafları ve Atlı tur problemi

- Euler graflarındaki tüm *kenarları* tam birer kez geçen bir kapalı iz bulma problemini tüm *köşelerden* birer kez geçen bir devir bulma ile değiştirirsek çok değişik alanlarda uygulamaları olan bir graf türü ile karşılaşırız: Hamilton grafları.
- Hamilton grafları ismini, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından icat edilmiş olan bir oyundan almıştır.
- Cebir alanında bir çok kavram ve sonuç üretmiş olan Hamilton’un bu oyunun Graf Teorik bağlantısı hariç Graf Teoriyle fazla ilgisi olmamıştır.
- Adı <u>**Düzgün Oniki Yüzlü Oyunu**</u> olan bu oyun, tahtadan bir düzgün oniki yüzlü üzerinde oynanıyordu.
- Düzgün oniki yüzlünün önceki bölümde ele aldığımız Platonik cisimlerden biri olduğunu hatırlayınız, bkz Şekil 19 ve Şekil 20.

- Düzgün oniki yüzlünün yirmi köşesinde çakılı olan yirmi çivinin her biri Dünya üzerindeki yirmi başkentten birisini temsil ediyordu.
- Oyunun amacı bir telin ucunu bir çiviye bağlayıp komşu çivilerden (şehirlerden) birisine geçerek tüm yirmi şehri dolaşmak ve başlanılan şehre geri dönmek, bir başka deyişle bir orta boy bir dünya turu atmak idi.
- Bu da Graf Teori dilinde yirmi köşeli bir grafta herhangi bir köşeden başlayıp her bir köşeden birer kez geçip başlanılan köşeye geri dönmek şeklinde ifade edilebilir.
- Hamilton icat ettiği oyunu 1859 yılında bugün hala oyuncak üreten J. Jacques ve Oğulları adlı firmaya sattı ve patentini aldı, ama oyun beklenen ilgiyi görmedi ve satışları düşük oldu.




- **Şekil 40: Hamilton'un Düzgün Oniki Yüzlü Oyunu**

- Tabii ki Hamilton için oyunun altındaki matematiksel gizem paradan daha önemliydi.
- Yukarıda bahsedilen özellikteki bir devir bulunabilir miydi? Bulunabilirse, böyle bir devir kaç farklı şekilde elde edilebilirdi? Doğal olarak oyunun satılabilmesi için en az bir çözümünün olması gerekirdi.

- Çözülemeyeceğini bildiği bir oyunu kimse almazdı. Aslında bu oyunun çok sayıda çözümü mevcuttu.
- Örneğin başlangıç köşeleri olarak *CDMLK* köşe dizisi seçilirse böyle bir devre iki farklı şekilde oluşturulabilir:

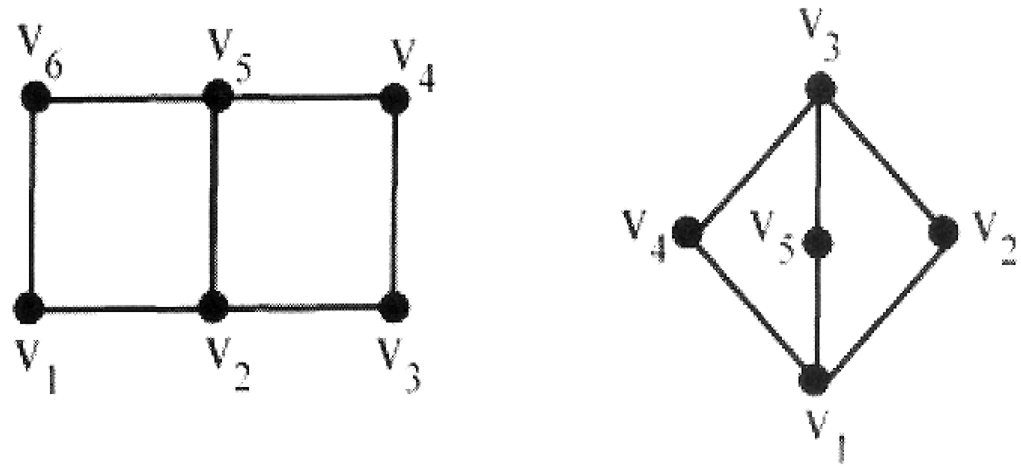
$$C\ D\ M\ L\ K\ F\ G\ H\ J\ V\ T\ S\ N\ P\ Q\ R\ W\ X\ Z\ B\ C$$

$$C\ D\ M\ L\ K\ F\ G\ B\ Z\ Q\ R\ W\ X\ H\ J\ V\ T\ S\ N\ P\ C$$

- Siz de *HJVTL* ve *MNPQR* köşe dizileri ile başlayan kaçar tane devre bulunduğunu araştırınız.
- Artık Hamilton graflarını tanımlayabilecek aşamaya geldik. Euler graflarına benzer şekilde hangi graflarda tüm köşeleri birer kez bulunduran kapalı bir yolun mevcut olabileceğini sorduğumuzu hatırlayalım.
- Bir *G* grafında her bir köşeden geçen bir patikaya bir **Hamilton patikası** denilir.

- *G* en az üç köşeli bir graf ise G'deki tüm köşelerden birer kez geçen bir devire **Hamilton devri** denilir.
- Bir Hamilton devri bulunduran bir grafa da **Hamilton grafı** adı verilir.
- Tanımda dikkat edilecek bazı noktaları vurgulayalım. İlk olarak Hamilton graflarının bağlantılı olması gerektiğine dikkat ediniz.
- Euler graflarının en genel tanımında izole noktalara da müsaade edildiğini ve dolayısıyla Euler graflarının bağlantısız olabileceğini hatırlayınız.
- Ancak uygulamada kullanılan Euler graflarının bağlantılı olduğunu da vurgulamak gerekir. Ayrıca bir Hamilton devri tüm köşelerden birer kez geçebileceğinden tüm kenarlardan da en çok birer kez geçecektir.

- Yani Hamilton graflarında hem tüm köşelerden hem de tüm kenarlardan birer kez geçilebilir. Şekil 41'daki ilk graf bir Hamilton grafıdır. Bu graftaki bir Hamilton devri *v1v2v3v4v5v6*'dır.




  - **Şekil 41**

- Bu bölümü Hamilton grafların en iyi bilinen ve eğlenceli uygulamalarından birisiyle tamamlayalım.
- Normal boyda bir satranç tahtasını düşünelim. Bir at herhangi bir yöne doğru 2 kare gittikten sonra bu yöne dik olarak bir adım daha atmaktadır.

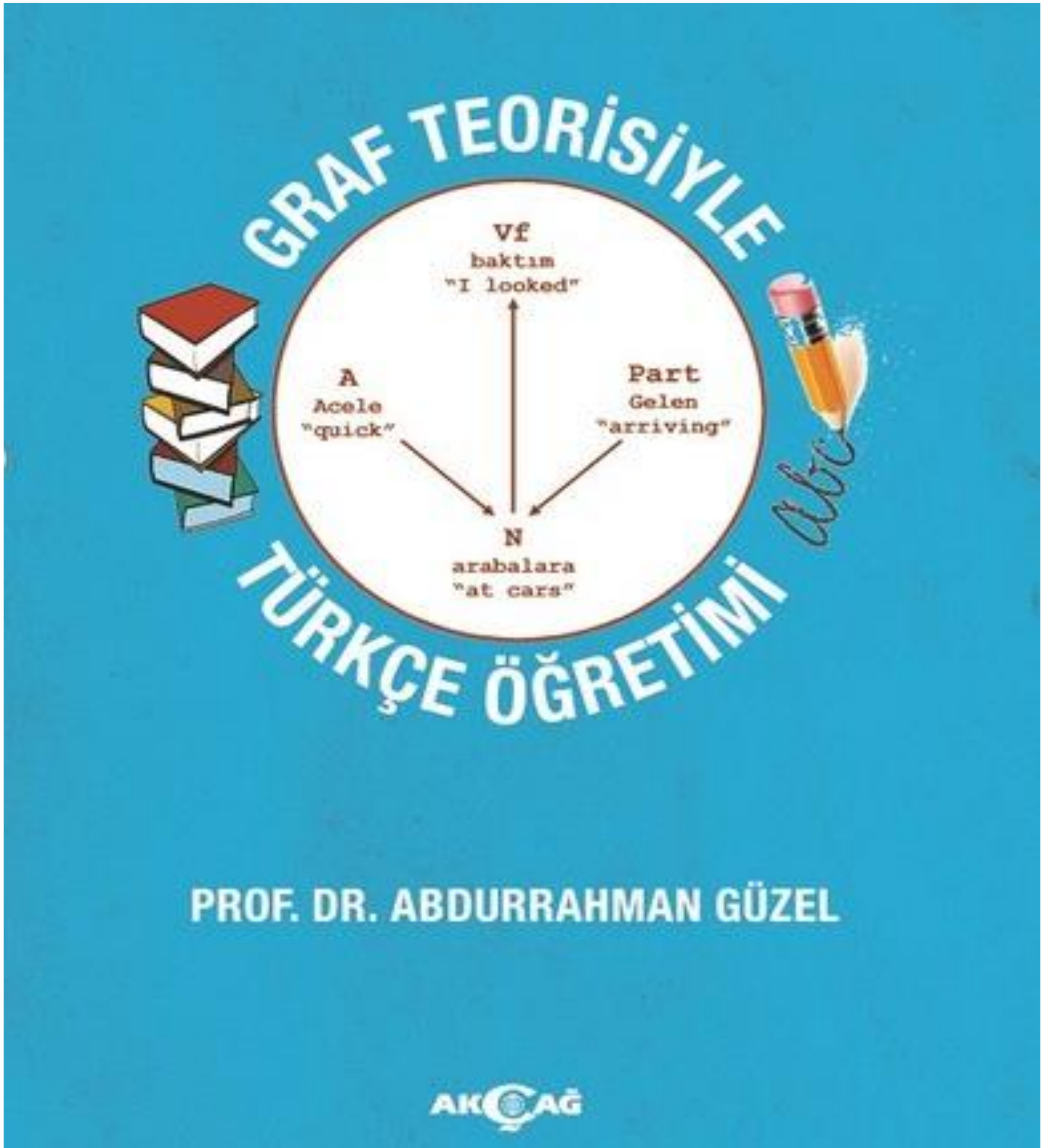
- Yüzyıllardır sorulan bir problem de tam olarak atın hareketleriyle ilgilidir.
- Tam olarak ifade etmek gerekirse adına “Atlı Tur” da denilen bu meşhur problemde bir satranç atının, satranç tahtasının herhangi bir karesinden başlayarak klasik at hamleleriyle satranç tahtasındaki tüm karelere birer kez uğrayıp başladığı kareye dönüp dönemeyeceği sorulmaktadır.
- Bu problemi çözmek için satranç tahtasındaki 64 kareyi köşeleri olarak kabul eden bir graf düşünelim.
- Böyle bir grafta iki köşenin komşu olması için bu köşelerden birisinden diğerine, atın L harfi şeklindeki bir hamlesiyle ulaşabilmemiz gerekir.
- Dolayısıyla sorulan problem aslında “64 köşeli bir grafta bir Hamilton devri bulabilir miyiz?” problemine dönüşür.

- Tabii atın her hamledeki seçenekleri bulunduğu karenin yerine bağlı olarak 2 ile 8 arasında değişmektedir.
- Bu problemin çok sayıda çözümü mevcuttur ve bunlardan birisi Şekil 42'de hamlelerin 1'den 64'e kadar olan tamsayılarla gösterildiği diyagramla verilmiştir:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 59 | 48 | 61 | 10 | 23 | 50 |
| 58 | 47 | 4 | 7 | 22 | 49 | 62 | 11 |
| 5 | 2 | 45 | 60 | 9 | 64 | 51 | 24 |
| 46 | 57 | 8 | 1 | 52 | 21 | 12 | 63 |
| 31 | 44 | 53 | 20 | 33 | 40 | 25 | 14 |
| 56 | 19 | 32 | 41 | 28 | 13 | 34 | 37 |
| 43 | 30 | 17 | 54 | 39 | 36 | 15 | 26 |
| 18 | 55 | 42 | 29 | 16 | 27 | 38 | 35 |

- **Şekil 42: Atlı tur**

- Bu örnekteki karenin büyülü bir kare olduğu açıktır ve her bir sıranın elemanlarının toplamı 260'dır.
- Tabii akla 8x8 satranç karesi yerine başka boyutlarda tahtaların alınması durumunda bu problemin yine bir çözümünün olup olmayacağı sorusu gelecektir. Bu konudaki bilinen en genel sonuç *n* tek iken *n* x *n* boyutundaki bir tahtada bir Hamilton devri bulunamayacağını belirtir.
- Benzer şekilde 4x4 boyutlu bir karede de bu problemin çözümünün olmadığını görebilirsiniz.


GRAF TEORİSİYLE
Vf
baktım
"I looked"
A
Acele
"quick"
Part
Gelen
"arriving"
N
arabalara
"at cars"
TÜRKÇE ÖĞRETİMİ
PROF. DR. ABDURRAHMAN GÜZEL
AKÇAĞ

## GRAF TEORİSİYLE TÜRKÇENİN ÖĞRETİMİ

- **Türkçenin öğretimi** için, dünyanın birçok ülkesinde ve Türk dünyasında; sözlük, gramer ve Türkçenin pratiğini öğretmeye yönelik el kitapları yazılmıştır.
- Bu eserlerin çoğunda geleneksel yöntemler kullanılmıştır.
- Ancak 1970'li yılların başında "**Türkçenin Öğretimi**" konusunda **Çekoslovakya**'da, günümüze bilindik çalışmalardan tamamen farklı, yeni bir çalışma yapılmıştır.
- Bu çalışma, **Dr. Ludek Hrebicek**'in yaptığı bir **Doktora Tezi**'dir.

- **Hrebicek** tezinde, geleneksel gramer öğretim kurallarını bir yana bırakarak, dünyada **Graf Teorisi** olarak bilinen alanı kullanarak yeni bir metod geliştirmiş ve bunu **Türkçe Dil Bilgisi öğretimine** uygulamıştır.
- Bu eser, ilk önce Çekce yazılmış, sonra İngilizceye ve sonrasında da Türkçeye çevrilmiştir.
- Bu nedenle hazırlanış ve çeviri döneminde bazı terminolojik sıkıntılar yaşanmıştır.
- Bundan dolayı, Türkçesi yazıldıktan sonra tekrar yazara gönderilerek oluru ve izni alınmış, hizmete sunulmuştur.

- Dr. Ludek Hrebicek in bu çalışması, Çekoslovak Bilimler Akademisi Doğu Dilleri Bilimleri Enstitüsünde, “Doğu Dillerinin Söz Varlığı İncelemesi” programı çerçevesinde bir doktora tezi olarak yapılmıştır.
- Tabiatıyla eser, bilimsel bir niteliğe sahiptir.
- Dr. Hrebicek, Graf Teorisi kapsamında eserini hazırlarken, bu konudaki zorlukları, cefayı, sabrı ve bilimsel titizliği kendisi ile birlikte göğüsleyen meslektaşlarına ve aynı zamanda kitabın müsveddelerini okuyan ve bazı bilimsel hatırlatmalarda bulunan Prof. Dr. Petracek’e, Graf Teori alanında uzman olan ve tezin hazırlanmasında kuramsal bir hataya düşmemesi için özveri ile yardımlarını esirgemeyen Dr. Prokop a teşekkürlerini sunmuştur.

- Bu eseri, kitabı oluşturan **Prof. Dr. Abdurrahman GÜZEL**, Çek Cumhuriyetine 1996 yılında yaptığı bir ziyaret esnasında elde etmiştir.
- Eser, **Hrebicek** tarafından “Graf Teorisi ile Açıklamalı Türkçenin Öğretimi” adı ile doktora tezi olarak hazırlanmıştır.
- Prof. Dr. Güzel, Dr. Hrebicek’den, Türkiye’de bu eserin tercüme edilip basılması konusunda izin almış ve 15 yıl süren zorlu bir çeviri-inceleme sonucunda bu kitabın ortaya çıkmasını sağlamıştır.

- **Biz de Çek Cumhuriyetinden bir muhterem Türkolog Bilim adamının, böylesi bir düşünce ile Türkiye Türkçesi üzerine bu çalışmayı yapmış olmasından dolayı, kendisine teşekkür ve takdirlerimizi sunuyoruz.**
- **Ayrıca böyle bir eserden bizi haberdar ederek, bu kitabın oluşmasını sağlayan Prof. Dr. Abdırrahman hocamıza da ayrıca teşekkür ediyoruz.**