Lineer Pozitif Operatörlerle Yaklaşım Teori: Tarihsel Gelişim

Tuncer ACAR
Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
E-Posta : tuncer.acar@selcuk.edu.tr

ÖZET

Bir topolojik uzayda, her bir elemanın uzayın yoğun bir alt uzayının elemanlarından oluşturulan dizinin yakınsadığı nokta olarak ifade edilebileceği gerçeğinden hareketle Karl-Weiertrass [1], $\mathbb{R}$' nin kompakt altkümeleri üzerinde tanımlı polinomlar uzayı $P[a,b]$' nin, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$' de yoğun olduğunu göstermiş, dolayısıyla kompakt kümeler üzerinde sürekli her f fonksiyonuna bir $p_n(x)$ polinomlar dizisi ile (düzgün) yaklaşılabileceğini ifade ve ispat etmiştir. Ancak topolojik metodlara dayanan bu ispat komplike ve uzun bulunmuş, dönemin birçok ünlü matematikçisi tarafından kısa ve basit bir ispatı verilmeye çalısılmıstır. Bu matematikçilerden bazılarını Carl Runge (1885) [2], Henri Lebesgue (1908) [3], Charles de la Vallée-Poussin, Lipot Fejér (1916) [4] olarak söyleyebiliriz. Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatı için verilen yöntemler olasılık teorisi, lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisi gibi bilimsel çalışma alanlarının doğmasına vesile olmuştur.
1912 yılında Segej N. Bernstein [5], Weierstrass yaklaşım teoriminin ispatı için sunduğu metod ile bugün kendi ismi ile anılan Bernstein polinomlarını tanımlamıştır. Bernstein polinomları, Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatı açısından basit bir metod sunması haricinde, önemi 20. yy ortalarına kadar anlaşılamamıştır. Fakat Paul de Faget'in Citroën firmasında ve Pierre Bézier'in Renault firmasında kendi endüstriyel dizaynları için Bernstein polinomlarını kullanması ile, Bernstein polinomları matematikçiler arasında popüler olmaya başlamış ve üzerine yoğunlaşan araştırmalar lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teori alanının doğmasına vesile olmuştur.
Seminerimizde lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorinin bu noktadan başlayan tarihsel sürecinden bahsedecek, ve teori üzerine olan güncel çalışmalarımdan Voronovskaya tipli teoremler (noktasal yaklaşım)' in bazı yeni formları incelenecektir

Anahtar Kelimeler : Yaklaşım Teori, Bernstein polinomları, Korovkin Teoremi, Voronovskaya Teoremi

ABSTRACT

With the fact that an element of a topological space can be stated as a limit point of the sequence composed by elements of a dense subset of it, Karl-Weiertrass [1] prove that $P[a,b]$' is a dense subset of $C[a,b]$, hence he proved that there exists a sequence of polynomials $p_n(x)$ which converges to $f \in C[a,b]$ uniformly in n. However such a proof was considered complicate and so long and a simple, short proof of that was tried to present by many famuous mathematician of era. Some of those can be mentioned as: Carl Runge (1885) [2], Henri Lebesgue (1908) [3], Charles de la Vallée-Poussin, Lipot Fejér (1916) [4]. The all methods to prove Weierstrass approximation theorem conduced to form of the theories: probability, approximation by linear positive operators.By a method to prove Weierstrass approximation theorem presented by Sergej N. Bernstein [5] in 1912, he constructed a sequence of polynomials which are called now as Bernstein polynomials. However, the importance of the polynomials could not been understood till middle of 20th century. When Paul de Faget from Citroën firm and Pierre Bézier'in from Renault firm used them in industrial design, Bernstein polynomials have been an active area of researches which conduced to starting of approximation by linear positive operators.

In this talk, we shall mention the rest of historical process of the theory and shall examine some of my recent results on the new forms of Voronovskaya theorems which are a method to examine pointwise convergence of corresponding sequence.

Key Words: Approximation Theory, Bernstein polynomials, Korovkin Theorem, Voronovskaya Theorem

KAYNAKLAR – REFERENCES

[1] Weierstrass, K. G., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsber. Akad. Berlin, 633-639, 789-805, 1885. [Ayrıca bkz: ”Mathematische Werke”, Vol. 3, 1-37, Berlin: Mayer & Müller 1903.]

[2] Runge. C., Zur theorie der eindeutigen analytischen functionen, Acta Math., 6, 229-244, 1885.

[3] Lebesgue, H., Sur la representation approchee des fonctions, Rend. Circ. Mat. Palermo 26, 325-328, 1908.

[4] Fejer, L., Ueber interpolation, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Mathematisch physikalische Klasse, 66-91, 1916. [Ha] J. Hadamard, The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton U. Press, Princeton, N. J., 1945.]

[5] Bernstein, S., Démonstration du théorème de Weierstrass, fondeé sur le calcul des probabilités, Commun. Soc. Math. Kharkow, 2, 13: 1-2, 1912-1913.

ÖNERİLEN KAYNAKLAR – SUGGESTED REFERENCES

[1] Lorentz, G.G., Bernstein polynomials, University of Toronto Press, 1953.

[2] Korovkin, P. P., Linear operators and approximation theory, Hindustan publishing Corp. (India), Delhi, 1-66, 1960.

[3] Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat., 2, 43-56, 1952.

[4] Chlodowsky, I., Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M. S. Bernstein, Compositio Math., 4, 380-393, 1937.

[5] Durrmeyer, J. L., Une formule d’inversion de la Transformee Laplace, Applications a la theorie des moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciences de l’ Universite de Paris, 1967.

[6] Kantorovich, L.V., Sur certains développement suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein, I, II, C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600, 1930.

[7] Gadjiev, A. D., Theorems of Korovkin type, Mat. Zametki., 20(5), 781-786, 1976 (in Russian), Math. Notes, 20(5), 996–998, 1976.

[8] Voronovskaja, E.V., D´etermination de la forme asymptotique de l’approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein (Russian), C.R. Acad. Sc. URSS, 79-85, 1932.