Kararlı Homoloji ve Ayrık Morse Teori

Hanife Varlı

E-Posta: varlihanife55@gmail.com

ÖZET

Topolojik Veri Analizi (TVA), deneylerden elde edilen verilerin topolojik özelliklerinin, geometrisinin (şeklinin) anlaşılmasında kullanılan bir teoridir. TVA ’da kullanılan başarılı tekniklerden birisi kararlı homolojidir. Kararlı homoloji kavramı ilk olarak Patrizio Frossini [1] ve çalışma arkadaşları tarafından, daha sonra Edelsbrunner, Letscher ve Zomorodian tarafından verilmiştir [2]. Kararlı homoloji cebirsel topolojinin bazı yöntemlerini kullanarak karmaşık geometrik yapının iyi anlaşılmasını sağlar.
Verilen bir K kompleksinin süzümü, altkomplekslerinin

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n = K$$

şeklinde iç içe geçmiş bir dizisidir. Bir kompleksin süzümü, üzerinde tanımlı olan, mükemmel ayrık Morse fonksiyonu olarak adlandırılan ve kombinatoryal amaçlar için daha verimli olan özel bir fonksiyonla elde edilebilir [3,4].
Bir K kompleksinin kararlı homoloji grubu, alt komplekslerin homoloji grupları arasında var olan homomorfizmaların görüntü kümesidir öyle ki bu homomorfizmalar içerme fonksiyonları tarafından verilir.
TVA’ da kullanılan diğer bir yöntem ayrık Morse teorisidir. Bu teori, K kompleksinin süzümünde bulunan hücre sayılarını azaltarak, kararlı homoloji gruplarının daha hızlı ve verimli bir şekilde hesaplanmasını sağlar.
Biz bu konuşmada, öncelikle kararlı homoloji ve ayrık Morse teorisinin temellerinden bahsedeceğiz. Karmaşık verilerin topolojik özelliklerini, onun daha küçük parçalarını kullanarak elde etmek amacıyla kararlı homoloji için Mayer-Vietoris dizisini inceleyeceğiz [7]. Ayrıca, 2 ve 3 boyutlu manifoldlar üzerinde mükemmel ayrık Morse fonksiyonlarının varlığının, bileşenler üzerinde mükemmel ayrık Morse fonksiyonları verdiğini göstererek, verinin topolojik özelliklerinin, onun daha küçük parçalarının topolojik özelliklerinden elde edilebileceğini göstereceğiz[5,6].

Anahtar Kelimeler: Kararlı homoloji, Mükemmel ayrık Morse fonksiyonu, Mayer-Vietoris dizisi.

ABSTRACT

Topological Data Analysis (TDA) is a theory used to understand the topological properties and geometry (shape) of the data obtained from experiments. One of the successful techniques used in TDA is persistent homology. The concept of persistent homology was first given by Patrizio Frossini [1] and his collaborators, and later by Edelsbrunner, Letscher and Zomorodian [2]. Persistent homology provides a well understood codification of complicated geometric information by using some methods of algebraic topology. A filtration of a complex K is a nested sequence of subcomplexes

$$\boldsymbol{\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n = K.}$$

A filtration of the complex can be obtained by a special function defined on it, which is called perfect discrete Morse function and more efficient for the combinatorial purposes [3,4]..
The persistent homology group of K is the image of the homomorphisms between the homology groups of the subcomplexes in its filtration such that these homomorphisms are induced by the inclusion maps.
Another method used in TDA is the discrete Morse theory. This theory provides more rapid and efficient calculation of persistent homology groups by reducing the number of cells found in the filtration of K.
In this talk, we will mention basic theory of persistent homology and discrete Morse theory. We will examine Mayer-Vietoris sequence for persistent homology in order to obtain topological features of complicated data by analysing smaller components of it [7]. Furthermore, we will also show that the existence of perfect discrete Morse functions on 2- and 3- dimensional manifolds gives perfect discrete Morse functions on the components, so that the topological properties of the data can be obtained from the topological properties of its smaller parts [5,6].

Key Words: Persistent homology, Perfect discrete Morse function, Mayer-Vietoris sequence.

KAYNAKLAR – REFERENCES

[1] Frosini, P. A distance for similarity classes of submanifolds of a Euclidean space, Bulletin Australian Math. Soc. 42 (1990), 407-416.

[2] Edelsbrunner, H., Letscher, D., and Zomorodian, A., Topological persistence and simpli_cation, In Proc. 41st IEEE Sympos. Found. Comput. Sci., 2000, 454-463, also Discrete Comput. Geom. 28 (2002), 511-533.

[3] Forman, R., Morse theory for cell complexes, Adv. Math. 134 (1998), 90–145.

[4] Lewiner, T., Lopes, H., Tavares, G., Optimal discrete Morse functions for 2-manifolds, Comput. Geom. Math. 26(3) (2003), pp. 221–233.

[5] Varlı, H., Pamuk, M., and Kosta, N. M., Perfect discrete Morse functions on connected sums, Homology, Homotopy and Appl. (2018), doi:10.4310/HHA.2018.v20.n1.a13.

[6] Kosta, N.M., Pamuk, M., and Varlı, H., Decomposing perfect discrete Morse functions on connected sums of 3-manifolds, arXiv:1804.00783v1.

[7] Varlı, H., Yılmaz, Y., and Pamuk M., Homological properties of persistent homology, arXiv:1805.01274v1.